Schadenversicherungsmathematik

Teil 4: Risikoteilung

Dr. Ulrich Riegel

Mathematisches Institut
Ludwig-Maximilians-Universität München

Wintersemester 2023/24

Inhalt

Kollektives Modell

Definition:

Ein Paar $(N, \{X_n\}_{n\geq 1})$, bestehend aus einer Schadenzahl N und einer i.i.d.-Folge von Schadenhöhen $X_1, X_2, \ldots$ heißt *Kollektives Modell* für ein Portefeuille von Risiken, wenn N und $\{X_n\}_{n\geq 1}$ unabhängig sind und sich der Gesamtschaden S des Portefeuilles darstellen lässt als

$$S = \sum_{n=1}^{N} X_n.$$

Mit X bezeichnen wir im Folgenden eine Zufallsvariable mit der gleichen Verteilungsfunktion F wie die X_n.

Kollektives Modell

Bemerkungen:

- Die Unabhängigkeit von Schadenhöhe und Schadenzahl ist eventuell verletzt bei Naturgefahren- oder Konjunktur-Einflüssen, die Schadenzahl und -höhe zugleich beeinflussen (z.B. Winter mit viel Glatteis in KH).
- Die Unabhängigkeit der Schadenhöhen ist weitgehend unproblematisch. Gegebenenfalls kann man Schäden aus abhängige Policen (z.B. Gebäude/Inhalt) zu einem Schaden zusammenfassen.
- Die identische Verteilung der Schadenhöhen erscheint irreal angesichts unterschiedlich großer Risiken (Versicherungssummen), aber es geht hier nicht um die Verteilung der Schäden zu bestimmten Risiken, sondern um die Mischverteilung der Schadenhöhen aller im Portefeuille befindlichen Risiken.
- F ist die Verteilung, die man beobachtet, wenn man die Schadenhöhen der Reihe nach notiert, also nicht weiß, welches Risiko den nächsten Schaden verursacht.

Waldsche Identitäten

Satz (Waldsche Identitäten): *Im kollektiven Modell gilt:*

(1) $\mathrm{E}(S) = \mathrm{E}(N) \cdot \mathrm{E}(X)$

(2) $\mathrm{Var}(S) = \mathrm{Var}(N)\,\mathrm{E}(X)^2 + \mathrm{E}(N)\,\mathrm{Var}(X)$

Bemerkung: In dem Spezialfall $N \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ folgt aus den Waldschen Gleichungen

$$\mathrm{E}(S) = \lambda \cdot \mathrm{E}(X) \quad \text{und} \quad \mathrm{Var}(S) = \lambda \cdot \mathrm{E}(X^2).$$

LogNormal-Verteilung

Parameter: $\sigma > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, statt μ kann man den Skalenparameter $b := e^{\mu}$ verwenden

Einordnung: $X \sim \text{LogNorm}(\mu, \sigma^2) \quad \Rightarrow \quad \ln(X) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

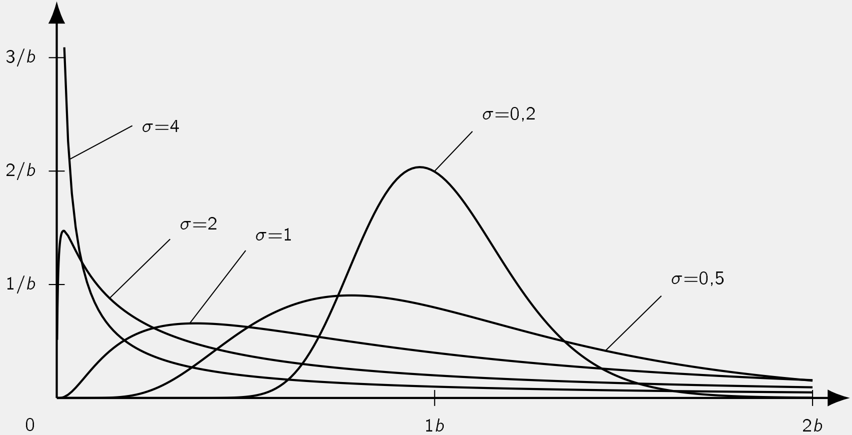
Verteilungsfunktion: $F(x) = \Phi\left(\frac{\ln(x) - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\ln\left(\frac{x}{b}\right)\right)$ für $x > 0$

Dichte: $f(x) = \frac{1}{x \cdot \sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(\ln(x) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ für $x > 0$

Momente: $\mathrm{E}(X^k) = \exp\left(k \cdot \mu + \frac{k^2 \cdot \sigma^2}{2}\right) = b^k \cdot \exp\left(\frac{k^2 \cdot \sigma^2}{2}\right)$ für $k \geq 1$, insb.

$$\mathrm{E}(X) = e^{\mu + \sigma^2/2} \quad \text{und} \quad \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X)^2(e^{\sigma^2} - 1).$$

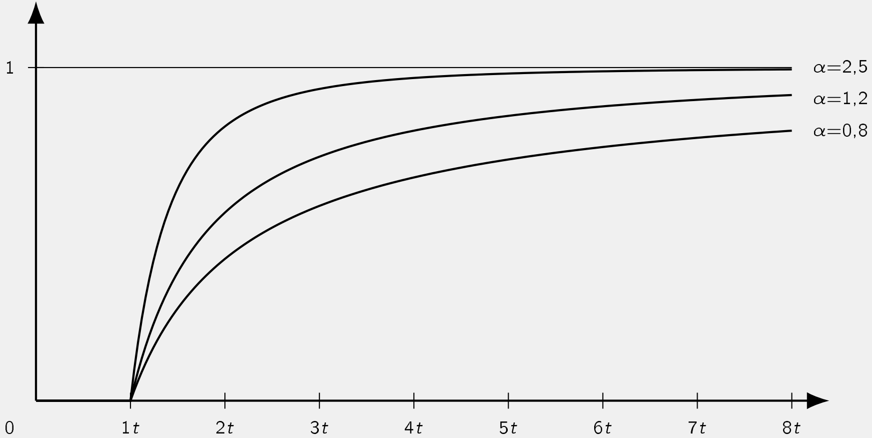
Dichten der LogNormal-Verteilung



Pareto-Verteilung

Parameter:	Skalenparameter $t > 0$, Formparameter $\alpha > 0$
Einordnung:	$X \sim \mathrm{Pareto}(t, \alpha) \quad \Rightarrow \quad \ln(X/t) \sim \mathrm{Exp}(\alpha)$
Verteilungsfunktion:	$F(x) = 1 - \left(\frac{t}{x}\right)^{\alpha}$ für $x > t$
Dichte:	$f(x) = \alpha \cdot t^{\alpha} \cdot x^{-\alpha-1}$ für $x > t$
Momente:	$\mathrm{E}(X^k) = t^k \cdot \frac{\alpha}{\alpha - k}$ für $k \in \mathbb{N}$ mit $k < \alpha$

Verteilungsfunktionen der Pareto-Verteilung



Pareto-Verteilung

Lemma: *Die Pareto-Verteilung hat folgende Eigenschaften:*

(1) *Für $c > 0$ gilt*

$$X \sim \text{Pareto}(t, \alpha) \quad \Rightarrow \quad cX \sim \text{Pareto}(ct, \alpha).$$

(2) *Für $X \sim \text{Pareto}(t, \alpha)$ und $c > t$ gilt $X|(X > c) \sim \text{Pareto}(c, \alpha)$.*

Nullpunkt-Pareto-Verteilung

Parameter: Skalenparameter $t > 0$, Formparameter $\alpha > 0$

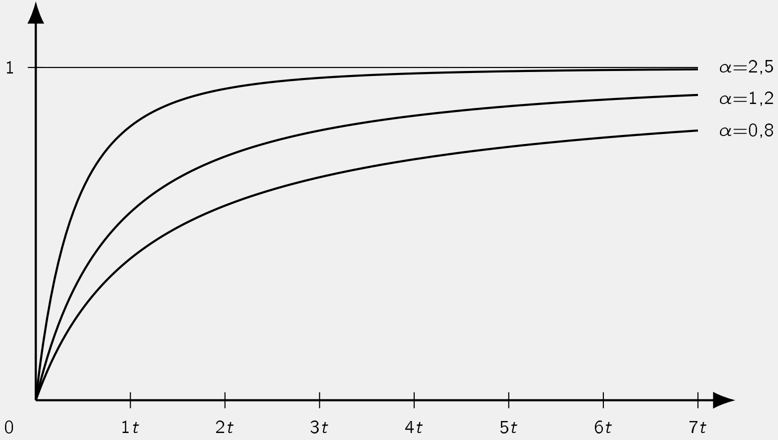
Einordnung: $X \sim \text{Pareto}_0(t, \alpha) \quad \Rightarrow \quad X + t \sim \text{Pareto}(t, \alpha)$

Verteilungsfunktion: $F(x) = 1 - \left(\frac{t}{t+x}\right)^\alpha$ für $x > 0$

Dichte: $f(x) = \alpha \cdot t^\alpha (t+x)^{-\alpha-1}$ für $x > 0$

Momente: $\mathrm{E}(X^k) = \frac{t^k}{\binom{\alpha-1}{k}}$ für $k \in \mathbb{N}$ mit $k < \alpha$

Verteilungsfunktionen der Nullpunkt-Pareto-Verteilung



Poisson-Verteilung

Parameter: $\lambda > 0$

Zähldichte: $\mathrm{P}(N = n) = e^{-\lambda} \cdot \dfrac{\lambda^n}{n!}$ für $n = 0, 1, \ldots$

Momente: $\mathrm{E}(N) = \lambda, \quad \mathrm{Var}(N) = \lambda, \quad \mathrm{E}\left((N - \mathrm{E}(N))^3\right) = \lambda$

Rekursion: $\mathrm{P}(N = n) = \mathrm{P}(N = n-1) \cdot \dfrac{\lambda}{n} \quad$ für $n \geq 1$

Negative Binomial-Verteilung

Parameter: $\alpha > 0,\ p \in (0,1)$

Inerpretation: Anzahl Misserfolge bis vor dem α-ten Erfolg (im Fall $\alpha \in \mathbb{N}$)

Zähldichte:
$$\mathrm{P}(N=n) = \binom{\alpha+n-1}{n} \cdot p^{\alpha} \cdot (1-p)^n \text{ für } n = 0, 1, \ldots$$

Momente:
$$\mathrm{E}(N) = \frac{\alpha \cdot (1-p)}{p}, \quad \mathrm{Var}(N) = \frac{\mathrm{E}(N)}{p},$$
$$\mathrm{E}\left((N - \mathrm{E}(N))^3\right) = \frac{\mathrm{Var}(N) \cdot (2-p)}{p}$$

Rekursion:
$$\mathrm{P}(N=n) = \mathrm{P}(N=n-1) \cdot (1-p) \cdot \frac{n+\alpha-1}{n} \quad \text{für } n \geq 1$$

Dispersion

Definition: Für eine $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsvariable N mit $\mathrm{E}(N) > 0$ heißt

$$\mathrm{D}(N) := \frac{\mathrm{Var}(N)}{\mathrm{E}(N)}$$

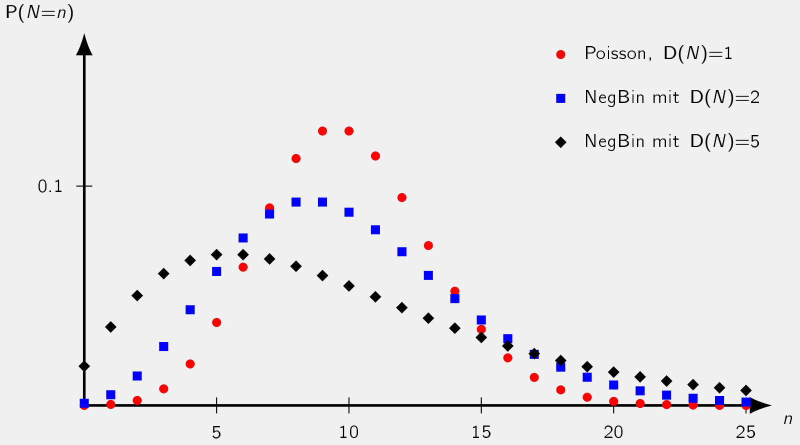
die *Dispersion*.

Bemerkungen:

- Für die Poisson-Verteilung gilt $\mathrm{D}(N) = 1$.
- Für die Negative Binomialverteilung gilt $\mathrm{D}(N) = 1/p > 1$.
- Die Parameter der Negativen Binomialverteilung lassen sich wie folgt aus Erwartungswert und Dispersion berechnen:

$$p = \frac{1}{\mathrm{D}(N)} \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{\mathrm{E}(N)}{\mathrm{D}(N) - 1}.$$

Poisson und Negativ Binomial mit $E(N) = 10$



Negative Binomialverteilung

Lemma:

Die Negative Binomialverteilung erhält man aus der Poisson-Verteilung, wenn man den Parameter Λ der Poisson-Verteilung zufällig mit einer Gamma-Verteilung zieht. Genauer:

$$\Lambda \sim \Gamma(\mu, \alpha) \textit{ und } \mathrm{P}^{N|\Lambda=\lambda} = \mathrm{Poi}(\lambda) \quad \Rightarrow \quad N \sim \mathrm{NegBin}(\alpha, p) \textit{ mit } p = \frac{\alpha}{\mu + \alpha}.$$

Poisson-Prozess

Bemerkung:

Entstehen die Schäden mit einem Poisson-Prozess, so ist die Anzahl der Schäden in einem festen Zeitraum automatisch Poisson-verteilt. Die Poisson-Verteilung ist also eine sehr plausible Schadenzahlverteilung.

Nach dem Lemma von Folie 17 vernünftig mit einer Negativen Binomialverteilung zu modellieren wenn

- die Schadenhäufigkeit von einer vorab unbekannten Jahresqualität abhängt (in KH z.B. milder/harter Winter) oder
- man berücksichtigen möchte, dass der Poisson-Parameter nur mit einer gewissen Unsicherheit geschätzt werden kann.

Gesamtschadenverteilung

- Ein Hauptziel des Kollektiven Modells ist die Berechnung der Gesamtschaden-Verteilung $G(s)$ von S aus den Verteilungen von X und N, insbesondere für $s \gg \mathrm{E}(S)$.
- Man braucht G insbesondere zur Bestimmung des Sicherheitskapitals und für bestimmte Formen der Risikoteilung.
- Die (zweiparametrischen) Verteilungsmodelle des Individuellen Modells (z.B. Gamma-Verteilung) liefern nur in der Nähe des Erwartungswerts eine brauchbare Approximation, und auch das nur bei homogenen Risikogruppen.

Gesamtschadenverteilung

Es gilt

$$\begin{aligned} G(s) = \mathrm{P}(S \leq s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}(N = n \wedge S \leq s) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}(N = n \wedge X_1 + \ldots + X_n \leq s) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}(N = n) \cdot \mathrm{P}(X_1 + \ldots + X_n \leq s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cdot F^{*n}(s) \end{aligned}$$

mit $p_n = \mathrm{P}(N = n)$ und

$$F^{*0}(x) := \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}, \quad F^{*1}(x) := F(x) \quad \text{und} \quad F^{*n}(s) := \int F^{*(n-1)}(s-x)dF(x).$$

Die Berechnung der Gesamtschadenverteilung mit dieser Formel problematisch, da beliebig hohe Faltungspotenzen vorkommen (extrem rechenaufwändig).

Panjer-Rekursion

Für die (in der Praxis) wichtigsten Situationen gibt es jedoch einen sehr effizienten Algorithmus zur Berechnung der Gesamtschadenverteilung.

Für die Verteilung $p_n = \mathrm{P}(N = n)$ der Schadenzahl N gelte die Rekursion

$$p_n = \left(a + \frac{b}{n}\right) \cdot p_{n-1}.$$

Ferner sei die Verteilung der Schadenhöhen X_n arithmetisch diskret mit Schrittweite $h > 0$, d.h. für

$$f_k := \mathrm{P}(X = k \cdot h) \quad \text{gilt} \quad \sum_{k=0}^{\infty} f_k = 1.$$

Panjer-Rekursion

Satz (Panjer 1980):

Dann kann die ebenfalls arithmetisch diskrete Verteilung $g_k := \mathrm{P}(S = k \cdot h)$ *des Gesamtschadens* $S = \sum_{n=0}^{N} X_n$ *rekursiv berechnet werden gemäß*

$$g_0 = \begin{cases} p_0 \cdot \exp(b \cdot f_0) & \textit{falls } a = 0 \\ \dfrac{p_0}{(1 - a \cdot f_0)^{1+\frac{b}{a}}} & \textit{falls } a \neq 0 \end{cases} \qquad \textit{und}$$

$$g_k = \frac{1}{1 - a \cdot f_0} \sum_{j=1}^{k} \left(a + \frac{b \cdot j}{k} \right) \cdot f_j \cdot g_{k-j} \quad \textit{für } k \geq 1.$$

Panjer-Rekursion

Bemerkung:

Für die relevanten Schadenzahlverteilungen (Poisson und Negativ Binomial) gibt es eine Rekursion der Form $p_n = \left(a + \frac{b}{n}\right) \cdot p_{n-1}$:

$$\begin{array}{lcl} N \sim \mathrm{Poi}(\lambda) & \Rightarrow & a = 0,\ b = \lambda \\ N \sim \mathrm{NegBin}(\alpha, p) & \Rightarrow & a = 1 - p,\ b = (\alpha - 1)(1 - p) \end{array}$$

Eine Rekursion dieser Form gibt es ansonsten nur noch für die Binomialverteilung!

Bemerkung:

Ist Schadenhöhenverteilung nicht arithmetisch diskret, so muss sie zuerst durch eine arithmetisch diskrete Verteilung approximiert werden. Hierzu gibt es Verfahren wie z.B. das *Local Moment Matching* (siehe unten).

Effizienz der Panjer-Rekursion

Es sei

$$f_k^{*n} := P(X_1 + \cdots + X_n = k \cdot h).$$

Wir nehmen oBdA $f_0 = 0$ an.

Will man g_k für $k = 0, \ldots, K$ berechnen, so muss man f_k^{*n} für alle n und k mit $n \leq k \leq K$ berechnen.

Effizienz der Panjer-Rekursion

Tut man dies rekursiv mit der Formel

$$f_k^{*n} = \sum_{\nu=1}^{k-n+1} f_{k-\nu}^{*(n-1)} \cdot f_\nu,$$

so benötigt man folgende Anzahl an Multiplikationen:

Wahrscheinlichkeiten	Anzahl Multiplikationen
$f_2^{*2}, \ldots, f_K^{*2}$	$1 + 2 + 3 + \cdots + (K-2) + (K-1)$
$f_3^{*3}, \ldots, f_K^{*3}$	$1 + 2 + 3 + \cdots + (K-2)$
...	...
$f_{K-2}^{*(K-2)}, \ldots, f_K^{*(K-2)}$	$1 + 2 + 3$
$f_{K-1}^{*(K-1)}, f_K^{*(K-1)}$	$1 + 2$
f_K^{*K}	1

Effizienz der Panjer-Rekursion

Insgesamt braucht man also

$$1 \cdot (K-1) + 2 \cdot (K-2) + \cdots + (K-2) \cdot 2 + (K-1) \cdot 1$$
$$\approx \int_0^K x \cdot (K-x)\, dx = \frac{K^3}{6}$$

Multiplikationen (wobei die Näherung bereits für $K \geq 10$ sehr gut ist).

Hinzu kommen noch die Multiplikationen mit $\mathrm{P}(N = n)$ (asymptotisch aber nicht relevant, da durch K^2 beschränkt).

Effizienz der Panjer-Rekursion

Mit der Panjer-Rekursion braucht man hingegen nur

$$4 + K + 4\sum_{k=1}^{K} k = 4 + K + 4\frac{K(K+1)}{2} \approx 2K^2$$

Multiplikationen und Divisionen.

Beispiel: Für $K = 10.000$:

- Panjer-Rekursion: etwa $2 \cdot 10^8$ Multiplikationen bzw. Divisionen
- Faltungspotenzen direkt berechnet: etwa $1{,}7 \cdot 10^{11}$ Multiplikationen!

Local Moment Matching

Sei $(N, \{X_n\}_{n\geq 1})$ ein kollektives Modell.

Um den Gesamtschaden $S = \sum_{n=1}^{N} X_n$ approximativ mit dem Verfahren von Panjer berechnen zu können, muss die Verteilungsfunktion F von X zuerst durch eine arithmetisch diskrete Verteilung $\tilde{F}$ einer Zufallsvariable $\tilde{X}$ approximiert werden.

Hierzu gibt es verschiedene Möglichkeiten. Man sollte dies aber möglichst so machen, dass auch Erwartungswert und Varianz von F und $\tilde{F}$ übereinstimmen. Dies leistet das Local Moment Matching-Verfahren.

Local Moment Matching

Seien $K \in \mathbb{N}$ gerade und $h > 0$. Bestimme Wahrscheinlichkeitsgewichte a_i, b_i, c_i für $i = 0, 2, 4, \ldots, K-2$, so dass

$$a_i + b_i + c_i = \int_{ih}^{(i+2)h} dF(x),$$

$$h(ia_i + (i+1)b_i + (i+2)c_i) = \int_{ih}^{(i+2)h} x\, dF(x) \quad \text{und}$$

$$h^2(i^2 a_i + (i+1)^2 b_i + (i+2)^2 c_i) = \int_{ih}^{(i+2)h} x^2\, dF(x).$$

Für jedes i ist dieses lineare Gleichungssystem eindeutig nach a_i, b_i und c_i lösbar.

Setze $f_0 := a_0$, $f_K := c_{K-2}$ und

$$f_k := \begin{cases} b_{k-1} & \text{falls } k \text{ ungerade und } 0 < k < K \\ a_k + c_{k-2} & \text{falls } k \text{ gerade und } 0 < k < K. \end{cases}$$

Local Moment Matching

$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$\cdots$
a_0	b_0	c_0		a_4	b_4	c_4	$\cdots$
		a_2	b_2	c_2			$\cdots$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	
f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	$\cdots$

Ist $F(Kh)=1$, so gilt dann $\sum_{k=0}^{K} f_k = 1$, $\sum_{k=0}^{K} kh \cdot f_k = \mathrm{E}(X)$ und $\sum_{k=0}^{K} (kh)^2 \cdot f_k = \mathrm{E}(X^2)$.

Der etwa verbleibende Tail rechts von Kh kann durch ein einziges zusätzliches Atom $z > Kh$ berücksichtigt werden.

Inhalt

Grundlegende Arten der Risikoteilung

Es sei X die Höhe eines Einzelschadens, eines Schadenereignisses, eines Einzelrisikos oder der Gesamtschaden eines Portefeuilles.

Grundlegenden Arten der Risikoteilung:

proportionale Risikoteilung	nichtproportionale Risikoteilung
$X = c \cdot X + (1-c) \cdot X$	$X = \min(X, a) + \max(X - a, 0)$
$0 < c < 1$	$a > 0$

Risikoteilung zwischen VN und VU

Gründe für Risikoteilung zwischen VN und VU:

- Ausschluss von Kleinschäden (nur bei nichtproportionaler Risikoteilung)
- Beeinflussung des moralischen Risikos
- Kostenreduktion (wenn VN sich für ein überdurchschnittlich gutes Risiko hält)

Beispiele für Risikoteilung zwischen VN und VU:

proportionale Risikoteilung	nichtproportionale Risikoteilung
Prozenttarif (PKV)	Selbstbehalt (z.B. in Kasko)
Unterversicherung (Hausrat)	Erstrisikodeckung (Haftpflicht)
Mitversicherung	Jahresfranchise (PKV)

Risikoteilung zwischen EV und RV

Gründe für RT zwischen Erstversicherer (EV) und Rückversicherer (RV):

- Verringerung des versicherungstechnischen Risikos beim EV, insb.
  - Schutz vor Großschäden (Zufallsrisiko)
  - Schutz vor Naturereignissen (Zufallrisiko)
  - Schutz vor Änderungs- und Prognoserisiko (z.B. Inflation)
- Verbesserung der Solvenz des EV
- Reduktion der Kapitalkosten des EV
- Homogenisierung des Portefeuilles des EV
- Ausweitung der Zeichnungskapazität des EV für Großrisiken
- Atomisierung von Risiken
- Unterstützung des EV beim Aufbau neuer Sparten
- Bessere Diversifikation beim RV (als beim EV)

Risikoteilung zwischen EV und RV

Wichtigste Formen der Risikoteilung zwischen EV und RV:

proportionale Risikoteilung	nichtproportionale Risikoteilung
Quote	Einzelschadenexzedent
Summenexzedent	Kumulschadenexzedent
	Jahresschadenexzedent (Stop Loss)

Ferner gibt es beliebige weitere (zum Teil exotische) Formen von Rückversicherung, z.B. die Höchstschaden-Rückversicherung.

Proportionale Rückversicherung

Wir betrachten ein Erstversicherungsportefeuille mit den Risiken $R_1, \ldots, R_I$ (typischerweise aus einer Branche, wie z.B. Kraftfahrt).

Dann lässt sich der Jahresgesamtschaden S des EV schreiben als

$$S = \sum_{i=1}^{I} R_i.$$

Quote (Quota Share, QS)

Bei der Quote wird der Gesamtschaden S mit einem festen *Quotenselbstbehalt* $c \in (0, 1)$ auf EV und RV aufgeteilt:

Selbstbehalt: $\tilde{S} := c \cdot S$

Abgabe (Zession): $\hat{S} := (1 - c) \cdot S$

Die Prämie wird mit den gleichen Prozentsätzen auf EV und RV aufgeteilt.

Einsatzgebiete:

- Verbesserung der Solvabilität beim EV
- Reduktion des Einflusses der größten Sparte
- Aufbau neuer Sparten

Beispiel Quote mit 20% Abgabe

Einzelschäden > 500.000 EUR

Bruttoschaden	RV-Abgabe	Selbstbehalt
700.000	140.000	560.000
3.000.000	600.000	2.400.000
1.500.000	300.000	1.200.000
6.000.000	1.200.000	4.800.000
600.000	120.000	480.000
1.200.000	240.000	960.000

Schadenbelastung aus Schäden ≤ 500.000

Bruttoschaden	RV-Abgabe	Selbstbehalt
97.500.000	19.500.000	78.000.000

Gesamtschaden

Bruttoschaden	RV-Abgabe	Selbstbehalt
110.500.000	22.100.000	88.400.000

Summenexzedent (Surplus, SX)

Beim Summenexzedent hängt der Prozentsatz, den der RV an einem Risiko trägt, von der Versicherungssumme ab.

Es sei u_i die Versicherungssumme des Risikos R_i. Bei einem Summenexzedent mit *Maximum* u_0 wird der Schaden S wie folgt auf EV und RV aufgeteilt:

Selbstbehalt: $$\tilde{S} := \sum_{i=1}^{I} c_i \cdot R_i \quad \text{mit } c_i := \min\left(\frac{u_0}{u_i}, 1\right)$$

Abgabe (Zession): $$\hat{S} := \sum_{i=1}^{I} (1 - c_i) \cdot R_i$$

Die Prämie des Risikos R_i wird mit den gleichen Prozentsätzen c_i und $1 - c_i$ auf EV und RV aufgeteilt wie die Schäden.

Summenexzedent (Surplus, SX)

Beobachtungen:

- Der RV übernimmt einen umso größeren prozentualen Anteil, je höher die VS des Risikos ist.
- Er bezahlt daher bei hoher VS auch von kleinen Schäden einen hohen Anteil.
- Der Selbstbehalt des EV entspricht dann einem Bestand mit Versicherungssummen $\leq u_0$.

Einsatzgebiete:

- Verbesserung der Solvabilität beim EV
- Homogenisierung des Portefeuilles
- Reduktion von Spitzenrisiken

Summenexzedent (Surplus, SX)

Bemerkung:

In der Praxis ist die RV-Kapazität limitiert. Sie wird als *Anzahl Maxima m* angegeben. Es ist dann

$$\hat{S} = \sum_{i=1}^{I} \min\left(1 - c_i, \frac{m u_0}{u_i}\right) \cdot R_i$$

und $\tilde{S} = S - \hat{S}$ mit obigen

$$c_i := \min\left(\frac{u_0}{u_i}, 1\right).$$

Beispiel Summenexzedent mit Maximum 2 Mio.

Einzelschäden > 500.000 EUR

VS	Anteil RV	Bruttoschaden	RV-Abgabe	Selbstbehalt
4.000.000	50%	700.000	350.000	350.000
6.000.000	67%	3.000.000	2.000.000	1.000.000
2.000.000	0%	1.500.000	0	1.500.000
6.000.000	67%	6.000.000	4.000.000	2.000.000
4.000.000	50%	600.000	300.000	300.000
3.000.000	33%	1.200.000	400.000	800.000

Schadenbelastung aus Schäden ≤ 500.000

Bruttoschaden	RV-Abgabe	Selbstbehalt
97.500.000	16.500.000	81.000.000

Gesamtschaden

Bruttoschaden	RV-Abgabe	Selbstbehalt
110.500.000	23.550.000	86.950.000

Beispiel Summenexzedent mit Maximum 2 Mio.

Einzelschäden > 500.000 EUR

VS	Anteil RV	Bruttoschaden	RV-Abgabe	Selbstbehalt
4.000.000	50%	700.000	350.000	350.000
6.000.000	67%	3.000.000	2.000.000	1.000.000
2.000.000	0%	[illegible]	0	1.500.000
6.000.000	67%	[illegible]	.000	2.000.000
4.000.000	50%	[illegible]	.000	300.000
3.000.000	33%	1.200.000	400.000	800.000

Zur Berechnung wird zu jedem Einzelschaden die Versicherungssumme benötigt!

Schadenbelastung aus Schäden ≤ 500.000

Bruttoschaden	RV-Abgabe	Selbstbehalt
97.500.000	16.500.000	81.000.000

Gesamtschaden

Bruttoschaden	RV-Abgabe	Selbstbehalt
110.500.000	23.550.000	86.950.000

Nichtproportionale Rückversicherung

Wir betrachten jetzt die Darstellungen

$$S = \sum_{n=1}^{N} X_n = \sum_{n=1}^{N^*} X_n^*$$

des Jahresgesamtschadens S, wobei

- X_n den n-ten Einzelschaden und
- X_n^* das n-te (Kumul-)Schadenereignis

bezeichnet.

Beachte: Für die Darstellung $S = \sum_{n=1}^{N^*} X_n^*$ ist die Ereignisdefinition ist entscheidend!

Einzelschadenexzedent (XL per Risk)

Beim Einzelschadenexzedent übernimmt der RV den Anteil an jedem Einzelschaden, der die sog. *Priorität* $a > 0$ übersteigt.

Selbstbehalt: $$\tilde{S} := \sum_{n=1}^{N} \min(a, X_n)$$

Abgabe (Zession): $$\hat{S} := \sum_{n=1}^{N} X_n - \min(a, X_n) = \sum_{n=1}^{N} \max(X_n - a, 0)$$

Einsatzgebiete:

- Schutz vor großen Schäden (Zufallsrisiko)
- Aber auch Schutz vor dem Prognose- und Änderungsrisiko bei langabwickelnden Großschäden in AH und KH

Einzelschadenexzedent (XL per Risk)

Bemerkung: In der Praxis ist die RV-Haftung meist limitiert, d.h.

$$\hat{S} := \sum_{n=1}^{N} \min\left(\max(X_n - a, 0), c\right)$$

mit der *Haftung* $c > 0$. Man spricht dann vom *Layer* c *xs* a. Die Summe $a + c$ heißt *Plafond* des Layers. Es gilt die *Layeridentität*

$$\begin{aligned} \min\left(\max(X - a, 0), c\right) &= \min(X, a + c) - \min(X, a) \\ &= \max(X - a, 0) - \max(X - (a + c), 0), \end{aligned}$$

d.h. ein limitierter Layer lässt sich als Differenz zweier unlimitierter Layer darstellen.

Wir beschränken uns daher im Folgenden meist auf den unlimitierten Fall.

Beispiel Einzelschadenexzedent 4 Mio. xs 1 Mio.

Einzelschäden > 500.000 EUR

Bruttoschaden	RV-Abgabe	Selbstbehalt
700.000	0	700.000
3.000.000	2.000.000	1.000.000
1.500.000	500.000	1.000.000
6.000.000	4.000.000	2.000.000
600.000	0	600.000
1.200.000	200.000	1.000.000

Schadenbelastung aus Schäden ≤ 500.000

Bruttoschaden	RV-Abgabe	Selbstbehalt
97.500.000	0	97.500.000

Gesamtschaden

Bruttoschaden	RV-Abgabe	Selbstbehalt
110.500.000	6.700.000	103.800.000

Kumulschadenexzedent (XL per Event, Cat-XL)

Die Funktionsweise des Kumulschadenexzedenten ist identisch zum Einzelschadenexzedent, nur dass statt den Einzelschäden X_n die Gesamtschäden von Ereignissen X_n^* eingebracht werden, die jeweils aus vielen kleinen Einzelschäden resultieren können:

Selbstbehalt: $$\tilde{S} := \sum_{n=1}^{N^*} \min(a, X_n^*)$$

Abgabe (Zession): $$\hat{S} := \sum_{n=1}^{N^*} X_n^* - \min(a, X_n^*) = \sum_{n=1}^{N^*} \max(X_n^* - a, 0)$$

Kumulschadenexzedent (XL per Event, Cat-XL)

Bemerkungen:

- Kumulschadenexzedenten sind in der Praxis *immer* limitiert, d.h.

$$\hat{S} = \sum_{m=1}^{N^*} \min\left(\max(X_m^* - a, 0), c\right)$$

  mit der *Haftung* $c > 0$.
- Außerdem gibt es in der Praxis immer ein *Annual Aggregate Limit (AAL)*, d.h. eine Begrenzung des Jahresgesamtschadens des Rückversicherers.
- Üblich als Schutz gegen Naturkatastrophen (Sturm, Hagel, Flut, Erdbeben), bei denen durch ein Ereignis viele Risiken betroffen sind.
- Auch üblich in Haftpflicht und Unfall.
- Oft schwierig: Gute Ereignisdefinition!

Beispiel Cat XL 50 Mio. xs 10 Mio.

Kumulschäden > 5.000.000 EUR

Bruttoschaden	RV-Abgabe	Selbstbehalt
8.000.000	0	8.000.000
45.000.000	35.000.000	10.000.000

Schadenbelastung aus sonstigen Schäden

Bruttoschaden	RV-Abgabe	Selbstbehalt
57.500.000	0	57.500.000

Gesamtschaden

Bruttoschaden	RV-Abgabe	Selbstbehalt
110.500.000	35.000.000	75.500.000

Jahresschadenexzedent (Stop Loss, SL)

Ein Stop Loss deckt die Gesamtschadenlast S. Der RV trägt den Teil von S, der die *Priorität* a übersteigt:

Selbstbehalt:	$\tilde{S} := \min(S, a)$
Abgabe (Zession):	$\hat{S} := \max(S - a, 0)$

Bemerkungen:

- Stop Loss-Verträge sind in der Praxis stets limitiert, d.h. $\hat{S} = \min\left(\max(S - a, 0), c\right)$ mit $c > 0$.
- Haftung c und Priorität a werden i.d.R. als Prozentsatz der Prämie formuliert.
- Üblich für stark schwankendes Geschäft (z.B. Sturm oder Hagel).
- Sollte nicht als Schutz gegen Untertarifierung dienen.

Beispiel Stop Loss 20% xs 100%

Bruttoprämie 80.000.000

Gesamtschaden

Bruttoschaden	RV-Abgabe	Selbstbehalt
110.500.000	16.000.000	94.500.000

Rückversicherungs-Bouquets

- In der Praxis kauft der EV nicht einen einzelnen Rückversicherungsvertrag sondern ein „Bouquet" von RV-Verträgen
- Dieses Bouquet wird unter gewissen Gesichtspunkten optimiert (Solvenz, Strategie, Risikoappetit, etc.)
- Die RV-Verträge werden typischerweise auf mehrere RV verteilt um das Ausfallrisiko zu minimieren.

Inhalt

Quote

Lemma: *Es sei G die Verteilungsfunktion von S. Bei einer Quote mit $c \in (0,1)$ gilt für den Selbstbehalt $\tilde{S} = c \cdot S$*

(1) $\tilde{G}(s) := P(\tilde{S} \leq s) = P(c \cdot S \leq s) = P\left(S \leq \frac{s}{c}\right) = G\left(\frac{s}{c}\right)$

(2) *Falls S eine Dichte g hat:* $\tilde{g}(s) := \tilde{G}'(s) = \frac{d}{ds} G\left(\frac{s}{c}\right) = \frac{1}{c} \cdot g\left(\frac{s}{c}\right)$

(3) $\mathrm{E}(\tilde{S}) = c \cdot \mathrm{E}(S), \qquad \mathrm{E}(\tilde{S}^k) = c^k \cdot \mathrm{E}(S^k)$

(4) $\mathrm{Var}(\tilde{S}) = c^2 \cdot \mathrm{Var}(S), \qquad \mathrm{Sd}(\tilde{S}) = c \cdot \mathrm{Sd}(S)$

(5) *Mit Sicherheitskapital b gilt:*

$$\mathrm{P}\left(\tilde{S} > \mathrm{E}(\tilde{S}) + b\right) = \mathrm{P}\left(S > \mathrm{E}(S) + \frac{b}{c}\right) \leq P\left(S > \mathrm{E}(S) + b\right),$$

d.h. die einjährige Ruinwahrscheinlichkeit wird kleiner bzw. die Sicherheitswahrscheinlichkeit wird größer.

Summenexzedent

Wir betrachten das Kollektive Modell

$$S = \sum_{n=1}^{N} X_n$$

und bezeichnen mit $V_n > 0$ die (zufällige) Versicherungssumme des n-ten Schadens. Sei $Y_n := X_n/V_n$ der Schadengrad des n-ten Schadens.

Lemma: *Die Versicherungssummen* $V_1, V_2, \ldots$ *seien i.i.d. und die Zufallsgrößen* $\{Y_n, V_n \mid n \geq 1\}$ *unabhängig. Dann sind auch die Schadengrade* $Y_1, Y_2, \ldots$ *i.i.d. und für einen Summenexzedenten mit Maximum* $u_0 > 0$ *und* $F(u_0) < 1$ *gilt*

$$\mathrm{Vco}(\tilde{S}) < \mathrm{Vco}(S).$$

Summenexzedent

Bemerkungen:

- Die Annahme, dass die Versicherungssummen i.i.d. sind, ist unkritisch.
- Die Unabhängigkeit von Schadengrad Y_n und Versicherungssumme V_n ist in manchen Teilbereichen der Sachversicherung (mit nicht allzu unterschiedlichen Versicherungssummen) durchaus realistisch.
- Für Haftpflicht ist die Annahme i.d.R. unrealistisch. Dort gibt es aber auch keine Summenexzedenten.

Schadenzahl bei nichtproportionaler Risikoteilung

Wir betrachten ein Kollektives Modell

$$S = \sum_{n=1}^{N} X_n$$

mit $F(0) = 0$, d.h. Schäden der Höhe null werden nicht gezählt. Wir betrachten einen Schadenexzedenten mit Priorität $a > 0$ und $F(a) < 1$.

Dann gilt für die Zahl nichttrivialer Schäden:

Selbstbehalt: $\tilde{N} = N$

Abgabe (Zession): $\hat{N} = \sum_{n=1}^{N} B_n \quad (B_n := 1_{\{X_n > a\}}$ Indikatorvariable$)$

Schadenzahl bei nichtproportionaler Risikoteilung

Wir setzen

$$p_a := \mathsf{E}(B_n) = \mathsf{P}(X_n > a).$$

Satz: *Dann gilt*

$$D(\hat{N}) - 1 = p_a \cdot [D(N) - 1].$$

Satz: *Es gilt*

$$\begin{aligned} N \sim \mathrm{Poi}(\lambda) \quad &\Rightarrow \quad \hat{N} \sim \mathrm{Poi}(p_a \lambda), \\ N \sim \mathrm{NegBin}(\alpha, p) \quad &\Rightarrow \quad \hat{N} \sim \mathrm{NegBin}\left(\alpha, \frac{p}{p + p_a - p_a p}\right). \end{aligned}$$

Nichtproportionale Risikoteilung der Schadenhöhe

Sei X die Schadenhöhe aus einem Kollektiven Modell und sei $a > 0$.

Wir nehmen stets $0 < F(a) = \mathrm{P}(X \leq a) < 1$ an, d.h. es liegt echte Risikoteilung vor.

Selbstbehalt bzw. Erstrisiko:	$\tilde{X} = \min(X, a)$
Abgabe bzw. Zweitrisiko:	$\hat{X} = \max(X - a, 0)$

Mit $\tilde{F}$ und $\hat{F}$ bezeichnen wir die Verteilungsfunktionen von $\tilde{X}$ und $\hat{X}$.

Schadenhöhe des Erstrisikos

Lemma: *Es gilt:*

(1) $\tilde{F}(x) = P(\tilde{X} \leq x) = \begin{cases} F(x) = P(X \leq x) & \textit{falls } x < a \\ 1 & \textit{falls } x \geq a \end{cases}$

(keine stetige Dichte, auch wenn X eine hat)

(2) $$\mathrm{E}(\tilde{X}^k) = \int_0^\infty x^k \, d\tilde{F}(x) = \int_0^\infty \min(x,a)^k \, dF(x)$$
$$= \int_0^a x^k dF(x) + a^k \cdot (1 - F(a)) = \underbrace{\int_0^a x^k \cdot f(x)\,dx + a^k \cdot (1 - F(a))}_{\textit{(falls } X \textit{ eine Dichte } f \textit{ hat)}}$$

(3) $$\mathrm{E}(\tilde{X}^k) = k \int_0^a x^{k-1}(1 - F(x))\,dx$$

(4) $\mathrm{Vco}(\tilde{X})$ *ist monoton wachsend in a und es ist* $\mathrm{Vco}(\tilde{X}) < \mathrm{Vco}(X)$

Schadenhöhe des Zweitrisikos

Da wir Schäden der Höhe null nicht zählen wollen, betrachten wir neben $\hat{X}$ die Zufallsgröße

$$\underline{\hat{X}} := \hat{X} \mid \{X > a\} = X - a \mid \{X > a\}.$$

Es bezeichne $\underline{\hat{F}}$ die zugehörige Verteilungsfunktion und $\underline{\hat{f}}$ die Dichte (falls vorhanden).

Lemma: *Es gilt*

(1) $\hat{F}(x) = F(a + x)$ *(für $x \geq 0$)*

(2) $\underline{\hat{F}}(x) = \dfrac{P(a < X \leq x + a)}{P(X > a)} = \dfrac{F(a + x) - F(a)}{1 - F(a)}$ *(für $x \geq 0$)*

(3) $\mathrm{E}(\underline{\hat{X}}^k) = \mathrm{E}\left((X - a)^k \mid X > a\right) = \dfrac{\int_a^\infty (x - a)^k \, dF(x)}{1 - F(a)} = \dfrac{\mathrm{E}(\hat{X}^k)}{1 - F(a)}$

(4) $\mathrm{Vco}(\hat{X})$ *ist monoton wachsend in a und es ist* $\mathrm{Vco}(X) < \mathrm{Vco}(\hat{X})$

Mittlerer Überschaden

Definition: $\mathrm{E}(\underline{\hat{X}})$ heißt *mittlerer Überschaden*.

Beispiel:

(1) Exponentialverteilung: $F(x) = 1 - e^{-x/b} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{E}(\underline{\hat{X}}) = b$,
also konstant und unabhängig von a

(2) Nullpunkt-Pareto: $F(x) = 1 - \left(\frac{t}{t+x}\right)^{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{E}(\underline{\hat{X}}) = \frac{a+t}{\alpha - 1}$,
also monoton wachsend in a für $\alpha > 1$

(3) Pareto: $F(x) = 1 - \left(\frac{t}{x}\right)^{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{E}(\underline{\hat{X}}) = \frac{a}{\alpha - 1}$ (falls $a \geq b$),
also linear in a für $\alpha > 1$

Gesamtschaden bei nichtproportionaler Risikoteilung

Mit den Bezeichnungen aus den vorangehenden Abschnitten gilt für den Gesamtschaden bei nichtproportionaler Risikoteilung mit Priorität a

Selbstbehalt: $$\tilde{S} = \sum_{n=1}^{N} \min(X_n, a) = \sum_{n=1}^{N} \tilde{X}_n$$

Abgabe: $$\hat{S} = \sum_{n=1}^{N} \max(X_n - a, 0) = \sum_{n=1}^{N} \hat{X}_n = \sum_{m=1}^{\hat{N}} \underline{\hat{X}}_m$$

Mit den Waldschen Identitäten erhalten wir für den Selbstbehalt

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\tilde{S}) &= \mathrm{E}(N) \cdot \mathrm{E}(\tilde{X}), \\ \mathrm{Var}(\tilde{S}) &= \mathrm{E}(N) \cdot \mathrm{Var}(\tilde{X}) + \mathrm{Var}(N) \cdot \mathrm{E}(\tilde{X})^2. \end{aligned}$$

Gesamtschaden bei nichtproportionaler Risikoteilung

Für die Abgabe erhalten wir

$$\mathrm{E}(\hat{S}) = \mathrm{E}(\hat{N}) \cdot \mathrm{E}(\underline{\hat{X}}) = \mathrm{E}(N) \cdot p_a \cdot \frac{\mathrm{E}(\hat{X})}{1 - F(a)} = \mathrm{E}(N) \cdot \mathrm{E}(\hat{X}),$$

$$\mathrm{Var}(\hat{S}) = \mathrm{E}(N) \cdot \mathrm{Var}(\hat{X}) + \mathrm{Var}(N) \cdot \mathrm{E}(\hat{X})^2 = \mathrm{E}(\hat{N}) \cdot \mathrm{Var}(\underline{\hat{X}}) + \mathrm{Var}(\hat{N}) \cdot \mathrm{E}(\underline{\hat{X}})^2.$$

Satz: $\mathrm{Vco}(\tilde{S})$ *und* $\mathrm{Vco}(\hat{S})$ *sind monoton wachsend in a. Es gilt*

$$\mathrm{Vco}(N) < \mathrm{Vco}(\tilde{S}) < \mathrm{Vco}(S) < \mathrm{Vco}(\hat{S}).$$

Beispiel

$X \sim$ Lognormal with $\mathrm{Vco}(X) = 4$, $N \sim \mathrm{Poi}(0{,}1)$. Dann ist

$$\mathrm{Vco}(N)^2 = \frac{\mathrm{Var}(N)}{\mathrm{E}(N)^2} = 10 \approx 3{,}16^2,$$

$$\mathrm{Vco}(S)^2 = \frac{\mathrm{Vco}(X)^2}{\mathrm{E}(N)} + \mathrm{Vco}(N)^2 = 170 \approx 13{,}0^2 \qquad \text{und}$$

$a/\,\mathrm{E}(X)$	0,01	0,1	1	10	100	∞
$\mathrm{Vco}(\tilde{S})$	3,2	3,3	4,3	7,0	10,9	13,0
$\mathrm{Vco}(\hat{S})$	13,2	14,1	20,8	61,9	466	

Entlastungseffekt

Wir betrachten ein Kollektives Modell mit $\mathrm{P}(X > 0) = 1$. Dann gilt bei nichtproportionaler Risikoteilung mit Priorität a

$$\frac{\mathrm{E}(\tilde{S})}{\mathrm{E}(S)} = \frac{\mathrm{E}(N)\,\mathrm{E}(\tilde{X})}{\mathrm{E}(N)\,\mathrm{E}(X)} = \frac{\mathrm{E}(\tilde{X})}{\mathrm{E}(X)} = \frac{\mathrm{E}(\min(X, a))}{\mathrm{E}(X)}.$$

Definition: Die Funktion $r : [0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$r(a) := \frac{\mathrm{E}(\min(X, a))}{\mathrm{E}(X)}$$

heißt *Entlastungseffektfunktion*.

Entlastungseffekt

Bemerkung: Für den Entlastungseffekt gilt nach dem Lemma auf Folie 61

$$r(a) = \frac{\int_0^a (1 - F(x))\, dx}{\mathrm{E}(X)}.$$

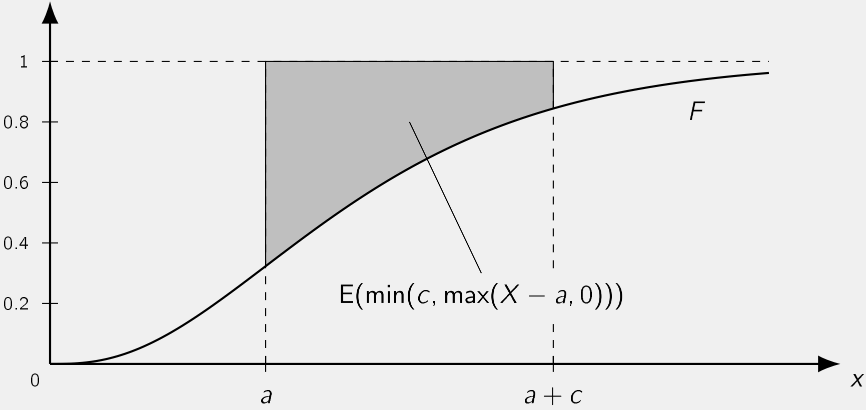
Es gilt natürlich auch

$$\mathrm{E}(\hat{X}) = \mathrm{E}\left(\max(X - a, 0)\right) = \int_a^\infty (1 - F(x))\, dx,$$

bzw. für limitierte Layer c xs a

$$\mathrm{E}\left(\min(c, \max(X - a, 0))\right) = \int_a^{a+c} (1 - F(x))\, dx.$$

Flächendarstellung des Schadens im Layer c xs a



Entlastungseffekt

Lemma:

Der Entlastungseffekt ist monoton wachsend, stetig, konkav und rechtsseitig differenzierbar. Bezeichnet r' die rechtsseitige Ableitung, so gilt

$$r(0) = 0, \quad \lim_{a\to\infty} r(a) = 1, \quad r'(a) = \frac{1 - F(a)}{\mathrm{E}(X)} \quad \textit{und} \quad r'(0) = \frac{1}{\mathrm{E}(X)}.$$

Ist der Höchstschaden $v := \sup\{x \mid F(x) < 1\} < \infty$, so gilt $r(a) = 1$ für $a \in [v, \infty)$. Die Schadenhöhenverteilung lässt sich durch

$$F(x) = 1 - \frac{r'(x)}{r'(0)}$$

aus dem Entlastungseffekt zurückgewinnen.

Risikoteilung und Inflation

- Allgemein versteht man unter Inflation jährliche Preisänderungen von Gütern und Dienstleistungen bestimmter Warenkörbe.
- In der Schadenversicherung spielt die Schadeninflation teilweise eine wesentliche Rolle.
- Zur Messung von Inflation wird häufig der Verbraucherpreisindex oder ein Lohn- und Gehaltsindex herangezogen.
- Bei großen, lang abwickelnden Personenschäden wird die Schadeninflation durch medizinische Inflation und Steigerung in den Pflegekosten getrieben und ist meist deutlich höher als die Steigerung der verwendeten Indizes („Superimposed Inflation").
- Wir beschreiben dieses komplexe Thema im Folgenden nur sehr oberflächlich.

Entlastungseffekt bei Inflation

Wächst die Schadenhöhe inflationsbedingt von X auf $X \cdot (1+i)$, so gilt für den neuen Entlastungseffekt r_i

$$r_i(a) := \frac{\mathrm{E}(\min(X \cdot (1+i), a))}{\mathrm{E}(X \cdot (1+i))} = \frac{\mathrm{E}\left(\min\left(X, \frac{a}{1+i}\right)\right)}{\mathrm{E}(X)} = r\left(\frac{a}{1+i}\right) < r(a)$$

(für $a > 0$ mit $F_X(a) < 1$).

Bei nichtproportionaler Risikoteilung partizipiert der Rückversicherer also überproportional an der Inflation.

Eine inflationsgemäße Anpassung der Grundprämie genügt daher nicht, es muss auch die Priorität a inflationsparallel erhöht werden um die Inflation gerecht aufzuteilen!

Beispiel zur Inflation

Ohne Anpassung der Priorität:

XL-Priorität 1.000 (alle Zahlen in 1.000)			Nach 3 Jahren ist alles z.B. 20% teurer		
Schadenhöhe	EV	RV	Schadenhöhe	EV	RV
100	100	-	120	120	-
500	500	-	600	600	-
900	900	-	1.080	1.000	80
1.000	1.000	-	1.200	1.000	200
1.500	1.000	500	1.800	1.000	800
4.000	3.500	500	4.800	3.720	1.080
Zuwachs:			20%	6%	116%

Beispiel zur Inflation

Wenn Priorität wird mit den 20% Inflation angepasst:

Vor Inflation XL-Priorität 1.000			Nach 20% Inflation XL-Priorität 1.200		
Schadenhöhe	EV	RV	Schadenhöhe	EV	RV
100	100	-	120	120	-
500	500	-	600	600	-
900	900	-	1,080	1,080	-
1.000	1.000	-	1.200	1.200	-
1.500	1.000	500	1.800	1.200	600
4.000	3.500	500	4.800	4.200	600
Zuwachs:			20%	20%	20%

Inflation bei Pareto-verteilter Schadenhöhe

Für die RV-relevanten Großschäden X ist die Pareto-Verteilung oft ein gutes Modell.

Bei einem unlimitierten XL mit Priorität $a > t$ und $\alpha > 1$ gilt für $X \sim \text{Pareto}(t, \alpha)$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\hat{S}) &= \mathrm{E}(N) \cdot \int_a^\infty (1 - F(x))\, dx \\
&= \mathrm{E}(N) \cdot \int_a^\infty t^\alpha \cdot x^{-\alpha}\, dx \\
&= \mathrm{E}(N) \cdot t^\alpha \cdot \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_{x=a}^\infty = \frac{\mathrm{E}(N)}{\alpha - 1} \cdot \left(\frac{t}{a} \right)^\alpha \cdot a.
\end{aligned}$$

Inflation bei Pareto-verteilter Schadenhöhe

Bei Inflation $X \to X_i := X \cdot (1+i)$ gilt $X_i \sim \mathrm{Pareto}((1+i)\cdot t, \alpha)$.

Also bei gleicher Priorität a:

$$\mathsf{E}(\hat{S}_i) = \frac{\mathsf{E}(N)}{\alpha - 1} \cdot \left(\frac{t \cdot (1+i)}{a}\right)^{\alpha} \cdot a,$$

d.h.

$$\frac{\mathsf{E}(\hat{S}_i)}{\mathsf{E}(\hat{S})} = (1+i)^{\alpha}.$$

Ein typischer Wert ist $\alpha = 2$. In diesem Fall hat der RV im Schadenexzedenten etwa doppelt so hohe Inflation wie im Original.

Inhalt

Das Kollektive Modell

Formen und Gründe der Risikoteilung

Einfluss der Risikoteilung auf die Schadenverteilungen

Tarifierung von Rückversicherungsverträgen

Tarifierung proportionaler RV-Verträge

Die Tarifierung von Quoten ist ersten Blick einfach (durchschnittliche Schadenquote der letzten n Jahre).

In der Realität ist die Quotierung von Quoten jedoch oft sehr komplex, z.B.:

- Separate Modellierung von
  - Basisschadenlast
  - Großschadenlast
  - Cat-Schadenlast
- Quantifizierung des Prämienzyklus
- Quantifizierung von Portefeuilleveränderungen
- Berücksichtigung von variablen Provisionsregelungen, Gewinnanteilen, Bouquet-Gewinnanteilen

Summenexzedenten sind meist noch schwerer einzuschätzen!

Tarifierung nichtproportionaler RV-Verträge

Zur Tarifierung (oder auch *Quotierung*) von nichtproportionalen Rückversicherungsverträgen gibt es zwei grundsätzlich verschiedene Ansätze:

Burning Cost-Quotierung:	Schätzung der erwarteten Schadenlast im *Quotierungsjahr* durch die individuelle Schadenerfahrung des EV in einem bestimmten *Beobachtungszeitraum*.
Exposure-Quotierung:	Verwendung von Marktschadenerfahrung bzw. Marktkurven und individuellen Bestandsinformationen

Im Folgenden beschränken wir uns auf die Tarifierung nichtproportionaler Verträge.

Burning Cost-Quotierung

Ausgangssituation:

- Zur Quotierung eines XLs mit Priorität $a > 0$ sei die Schadenerfahrung (große Einzel- bzw. Ereignisschäden) des EV der Anfalljahre $i = 1, \ldots, I$ (= Beobachtungszeitraum) bekannt.
- Wir befinden uns im Jahr $I + 1$ und wollen die erwartete Schadenlast $\mathsf{E}(\hat{S}_q)$ des RV im Quotierungsjahr $q := I + 2$ schätzen.
- Wir setzen im Folgenden voraus, dass mit den Schäden eine *as-if-Korrektur* durchgeführt wurde, d.h. jeder Schaden wurde so umgerechnet wie er sich im Quotierungsjahr darstellen würde (Inflation, Gesetzesänderungen, etc.).
- Auch die Prämie muss as-if-korrigiert werden, damit sie als Volumenmaß verwendet werden kann. Man spricht dann von der *revalorisierten Prämie*.

Burning Cost bei pro Risiko-XLs

Wir betrachten einen Risiko-XL mit Priorität a. Der Burning Cost-Ansatz für Schadenexzedenten pro Risiko beruht auf folgendem

Modell für pro Risiko-XLs

(R1) Die Anfalljahre sind unabhängig.

(R2) Für jedes Anfalljahr $i = 1, \ldots, q$ wird der Schaden $\hat{S}_i$ im XL mit Priorität a durch ein Kollektives Modell beschrieben, $\hat{S}_i = \sum_{n=1}^{\hat{N}_i} \underline{\hat{X}}_{in}$, wobei die Verteilung der xs-Schäden $\underline{\hat{X}}_{in}$ in allen Jahren gleich ist.

(R3) Es gibt (bekannte) Volumenmaße $v_1, \ldots, v_q$ (meist revalorisierte Prämie) und Konstanten $\nu, \beta > 0$, so dass $\mathrm{E}(\hat{N}_i) = \nu v_i$ und $\mathrm{Var}(\hat{N}_i) = \beta v_i$ gilt.

Burning Cost bei pro Risiko-XLs

Definition: Dann heißt

$$\mathrm{BC} := \frac{\sum_{i=1}^{I} \hat{S}_i}{\sum_{i=1}^{I} v_i} = \frac{\sum_{i=1}^{I} \sum_{n=1}^{\hat{N}_i} \underline{\hat{X}}_{in}}{\sum_{i=1}^{I} v_i}$$

der *(pro Risiko) Burning Cost* im Beobachtungszeitraum. Mit

$$\mathrm{BC}_i := \frac{\hat{S}_i}{v_i} = \frac{\sum_{n=1}^{\hat{N}_i} \underline{\hat{X}}_{in}}{v_i}$$

bezeichnen wir den *(pro Risiko) Burning Cost* des Anfalljahres $i \in \{1, \ldots, I\}$.

Lemma: *Die* BC_i *sind erwartungstreue Schätzer für* $\mathrm{E}(\hat{S}_q)/v_q$ *und* BC *ist die Konvexkombination der* BC_i *mit der geringsten Varianz.*

Beispiel XL per Risk 4 Mio. xs 1 Mio.

Geschätzte Prämie im Quotierungsjahr 2020: 80 Mio.

Jahr	Prämie	Schäden > 500.000	xs-Schaden
2015	50,000,000	1,500,000	500,000
		700,000	0
		4,500,000	3,500,000
2016	60,000,000	1,800,000	800,000
		800,000	0
2017	65,000,000	6,000,000	4,000,000
		1,200,000	200,000
		600,000	0
2018	70,000,000	2,500,000	1,500,000
		2,700,000	1,700,000
Summe	**245,000,000**	**22,300,000**	**12,200,000**

$$\Rightarrow \text{BC} = \frac{12.200.000}{245.000.000} \approx 4{,}98\% \Rightarrow \text{Erwarteter xs-Schaden 2020: 3,98 Mio.}$$

Burning Cost bei Cat-XLs

Wir betrachten nun einen Cat-XL mit Priorität a. Der Burning Cost-Ansatz für Kumulschadenexzedenten, die Naturereignisse (Sturm, Hagel, Überschwemmung, Erdbeben) decken, beruht auf folgendem

Modell für Cat-XLs:

(C1) Die Anfalljahre sind unabhängig.

(C2) Für jedes Anfalljahr $i = 1, \ldots, q$ wird der Schaden S_i aus Naturereignissen durch ein Kollektives Modell beschrieben: $S_i = \sum_{n=1}^{N_i^*} X_{in}^*$. Die Anzahl an Naturereignissen N_i^* ist in allen Anfalljahren i identisch verteilt.

(C3) Es gibt (bekannte) Volumenmaße $v_1, \ldots, v_q$ (revalorisierte Prämien oder Gesamt-Versicherungssumme), so dass die Zufallsgrößen X_{in}^*/v_i für alle i identisch verteilt sind.

Burning Cost bei Cat-XLs

Definition: Dann heißt

$$\mathrm{BC}^* := \frac{\sum_{i=1}^{I} \sum_{n=1}^{N_i^*} \max(\frac{v_q}{v_i} X_{in}^* - a, 0)}{I \cdot v_q}$$

der *(Cat-)Burning Cost* im Beobachtungszeitraum. Mit

$$\mathrm{BC}_i^* := \frac{\sum_{n=1}^{N_i^*} \max(\frac{v_q}{v_i} X_{in}^* - a, 0)}{v_q}$$

bezeichnen wir den *(Cat-)Burning Cost* des Anfalljahres $i \in \{1, \ldots, I\}$.

Es bezeichne $\hat{S}_q^*$ die Schadenlast des RV im Quotierungsjahr q.

Lemma: *Die* BC_i^* *sind erwartungstreue Schätzer für* $\mathrm{E}(\hat{S}_q^*)/v_q$ *und* BC^* *ist die Konvexkombination der* BC_i^* *mit der geringsten Varianz.*

Burning Cost bei Cat-XLs

Bemerkung:

Interpretation der Modellannahmen (C2) und (C3):

Wenn das Portefeuille wächst, so sind deshalb nicht mehr Stürme zu erwarten, sondern der einzelne Sturm verursacht im Portefeuille einen höheren Schaden!

Beispiel Cat-XL 5 Mio. xs 5 Mio.

Geschätzte Prämie im Quotierungsjahr 2020: 80 Mio.

Jahr	Prämie	Schäden > 2.500.000	Schäden as if 2020	xs-Schaden as if 2020
2015	50.000.000	4.000.000	6.400.000	1.400.000
		6.500.000	10.400.000	5.000.000
2016	60.000.000			
2017	65.000.000	6.500.000	8.000.000	3.000.000
2018	70.000.000	3.500.000	4.000.000	0
Summe	**245.000.000**	**20.500.000**	**28.800.000**	**9.400.000**

$$\Rightarrow BC^* = \frac{9.400.000}{320.000.000} \approx 2{,}94\%$$

$\Rightarrow$ Erwarteter xs-Schaden 2020: 2,35 Mio.

Exposurequotierung

Wir betrachten ein Portefeuille von Risiken $S = R_1 + \ldots + R_I$ und modellieren jedes Risiko mit einem Kollektiven Modell: $R_i = \sum_{n=1}^{N_i} X_{in}$.

Dann erhält man für einen Risiko-XL mit Priorität $a > 0$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\hat{S}) &= \sum_{i=1}^{I} \mathrm{E}(N_i) \cdot \mathrm{E}(\max(X_i - a, 0)) \\
&= \sum_{i=1}^{I} \frac{\mathrm{E}(N_i) \cdot \mathrm{E}(\max(X_i - a, 0))}{\mathrm{E}(N_i) \cdot \mathrm{E}(X_i)} \cdot \mathrm{E}(R_i) \\
&= \sum_{i=1}^{I} (1 - r_i(a)) \cdot \mathrm{E}(R_i),
\end{aligned}$$

d.h. der RV braucht nur die Entlastungseffektfunktionen r_i und die Nettoprämien $\mathrm{E}(R_i)$ zu kennen.

Exposurequotierung

Problem:

Der RV kennt i.d.R. nur die Schäden ab einer gewissen *Meldegrenze*, z.B. $X > a/2$. Zur Schätzung der Entlastungseffektfunktionen braucht man aber alle Schäden.

Wenn der RV diese Daten mal beschafft/ausgewertet hat, möchte er sie für möglichst viele Länder (Währungen) und Jahre (Inflation) anwenden.

In der Sachversicherung (Feuer) ist dies tatsächlich möglich, denn dort ist (innerhalb einer Risikoklasse) die folgende Annahme durchaus realistisch!

Feuer-Exposurequotierung

Annahme: Sei v_i die Versicherungssumme des Risikos R_i. Die Schadengrade $Y_{in} := X_{in}/v_i$ eines jeden Risikos sind wie ein Standardschadengrad Y verteilt.

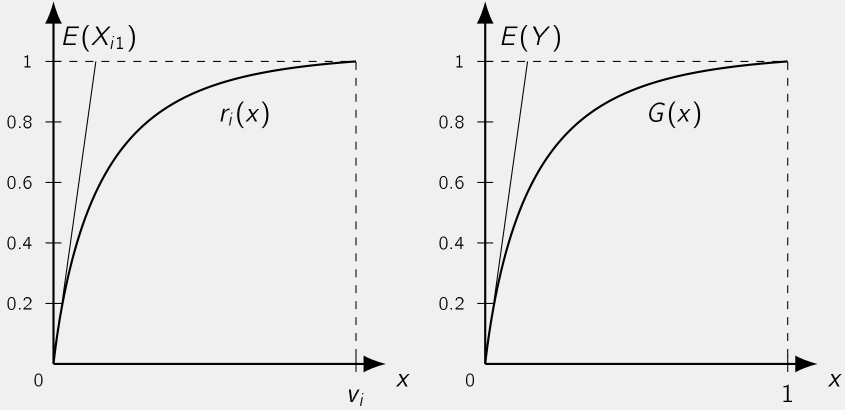
Mit dieser Annahme erhalten wir

$$r_i(a) = \frac{\mathrm{E}(\min(X_i, a))}{\mathrm{E}(X_i)} = \frac{\mathrm{E}\left(\min\left(Y, \frac{a}{v_i}\right)\right)}{\mathrm{E}(Y)} = G\left(\frac{a}{v_i}\right)$$

mit der sog. *(Feuer-)Exposurekurve*

$$G(y) := \begin{cases} \dfrac{\mathrm{E}(\min(Y, y))}{\mathrm{E}(Y)} & \text{für } 0 \le y \le 1 \\ 1 & \text{für } y \ge 1. \end{cases}$$

Entlastungseffekt r_i und Feuer-Exposurekurve G



Feuer-Exposurequotierung

Wir erhalten somit

Feuer-Exposurequotierung:

Für einen Risiko-XL mit Priorität a gilt somit

$$\mathrm{E}(\hat{S}) = \sum_{i=1}^{I} \left(1 - G\left(\frac{a}{v_i}\right)\right) \cdot \mathrm{E}(R_i),$$

mit der währungs- und inflationsunabhängigen Exposurekurve G.

Beispiel

Feuer-Exposurequotierung

Priorität ***D***	1.000.000		**Originalprämie**	**54.200.000**
Haftung ***C***	1.000.000		**Schadenbedarf XL**	**1.637.795**
Originalschadenquote	70%			

Summenband Nummer	Mittlere Versicherungssumme **v**	Originalprämie	Original-schadenbedarf	Priorität in % der mittl. VS: ***d = D/v***	Plafond in % der mittl. VS: ***p = (C+D)/v***	***G(d)***	***G(p)***	Schadenbedarf XL in % Originalschadenbedarf	Schadenbedarf XL absolut
1	750.000	23.500.000	16.450.000	>100%	>100%	100,0%	100,0%	0,0%	0
2	1.250.000	15.600.000	10.920.000	80,0%	>100%	95,5%	100,0%	4,5%	492.368
3	1.500.000	8.000.000	5.600.000	66,7%	>100%	91,8%	100,0%	8,2%	457.930
4	2.000.000	5.700.000	3.990.000	50,0%	100,0%	86,1%	100,0%	13,9%	552.949
5	2.500.000	1.400.000	980.000	40,0%	80,0%	81,8%	95,5%	13,7%	134.548
Gesamt		**54.200.000**	**37.940.000**						**1.637.795**

Haftplicht-Exposurequotierung (Zuschlagsquotierung)

In der Haftpflicht-Versicherung ist das Modell $X_{in} \sim v_i Y$ nicht realistisch, da v_i hier vom VN frei gewählt wird und eher dessen Risikoaversion widerspiegelt als die objektive Maximalgefährdung.

Realistisch ist eher $X_{in} \sim \min(X, v_i)$ mit einer für alle Risiken derselben Klasse gleichen Schadenhöhe X. Also

$$r_i(a) = \begin{cases} \dfrac{\mathsf{E}(\min(X,a))}{\mathsf{E}(\min(X,v_i))} = \dfrac{r(a)}{r(v_i)} & \text{für } 0 \le a \le v_i \\ 1 & \text{für } a \ge v_i \end{cases}$$

mit dem Entlastungseffekt $r(a) = \frac{\mathsf{E}(\min(X,a))}{\mathsf{E}(X)}$ von X.

Zuschlagsquotierung

Problem:

Hier sind X und r voll währungs- und inflationsabhängig. Entsprechendes gilt natürlich auch für die Originalnettoprämie:

$$S(v_i) := \mathrm{E}(N_i) \cdot \mathrm{E}(\min(X, v_i))$$

Daher benutzen die deutschen Erst- und Rückversicherer in dieser Situation oft eine Methode, die schon 1936 von Paul Riebesell vorgeschlagen wurde (*Riebesell-Modell*, *Zuschlagsquoierung*).

Zuschlagsquotierung

Sei $s_0 = S(v_0)$ die Nettoprämie für die Standard-VS v_0. Zur Berechnung der Nettoprämie $S(v)$ für höhere VS v empfiehlt Riebesell einen konstanten prozentualen *Zuschlagssatz* $z \in (0,1)$ für die Verdoppelung von Versicherungssummen (z.B. $z = 20\%$):

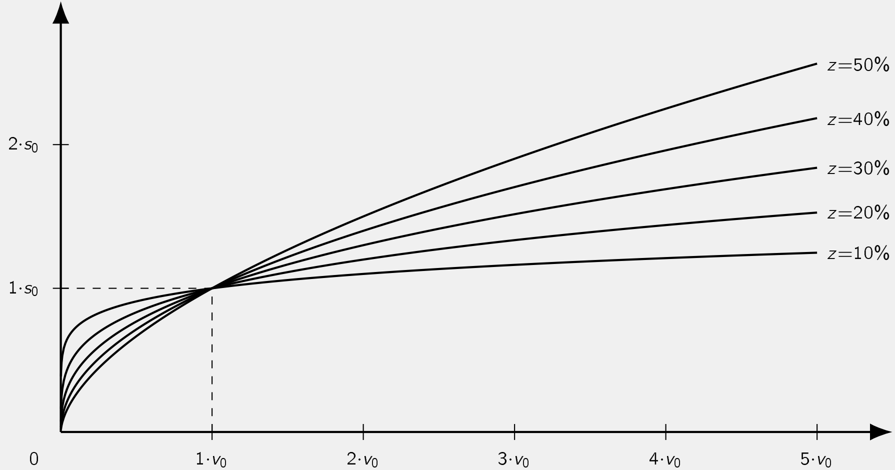
$$\begin{aligned} S_z(2 \cdot v_0) &= s_0 \cdot (1+z) \\ S_z(4 \cdot v_0) &= s_0 \cdot (1+z)^2, \\ S_z(2^k \cdot v_0) &= s_0 \cdot (1+z)^k. \end{aligned}$$

Einsetzen von $k = \log_2(v/v_0)$ liefert die

Riebesell-Formel: Für $v > 0$ und $z \in (0,1)$ ist

$$S_z(v) = s_0 \cdot (1+z)^{\log_2(v/v_0)} = s_0 \cdot \left(\frac{v}{v_0}\right)^{\log_2(1+z)}.$$

Prämienfunktionen $S_z(v)$ aus der Zuschlagsquotierung



Zuschlagsquotierung

Hieraus ergibt sich

Zuschlagsquotierung:

Für einen Risiko-XL mit Priorität a folgt aus der Riebesell-Formel

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\hat{S}) &= \sum_{i=1}^{I} \left(1 - \frac{S_z(\min(a, v_i))}{S_z(v_i)}\right) \cdot \mathrm{E}(R_i) \\ &= \sum_{i=1}^{I} \left(1 - \left(\frac{\min(a, v_i)}{v_i}\right)^{\log_2(1+z)}\right) \cdot \mathrm{E}(R_i) \end{aligned}$$

(währungs- und inflationsunabhängig!).

Beispiel

Zuschlagsquotierung

Priorität ***D***	1.000.000
Haftung ***C***	1.000.000
Originalschadenquote	65%
Zuschlagssatz ***z***	10%

Originalprämie	**54.200.000**
Schadenbedarf XL	**1.005.428**

Summenband Nummer	Mittlere Deckungssumme **v**	Originalprämie	Originalschaden-bedarf $S_z(v)$	$d := \min(D;v)$	$p := \min(C+D;v)$	$S_z(d)$	$S_z(p)$	absolut
1	750.000	23.500.000	15.275.000	750.000	750.000	15.275.000	15.275.000	0
2	1.250.000	15.600.000	10.140.000	1.000.000	1.250.000	9.833.599	10.140.000	306.401
3	1.500.000	8.000.000	5.200.000	1.000.000	1.500.000	4.918.019	5.200.000	281.981
4	2.000.000	5.700.000	3.705.000	1.000.000	2.000.000	3.368.182	3.705.000	336.818
5	2.500.000	1.400.000	910.000	1.000.000	2.000.000	802.275	882.502	80.227
Gesamt		**54.200.000**	**35.230.000**					**1.005.428**

Darstellbarkeit als Kollektives Modell

Frage: Ist die Zuschlagsquotierung mit dem Kollektiven Modell verträglich?

Definition:

Unter eine *Prämienfunktion* verstehen wir eine monoton wachsende Funktion $S\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ mit $S^{-1}(0) = \{0\}$.

Eine Prämienfunktion S heißt *mit dem Kollektiven Modell verträglich*, wenn es Zufallsvariablen $N\colon \Omega \to \mathbb{N}_0$ und $X\colon \Omega \to (0,\infty)$ gibt, so dass

$$S(v) = \mathrm{E}(N) \cdot \mathrm{E}(\min(X, v))$$

für alle $v \geq 0$ gilt.

Darstellbarkeit als Kollektives Modell

Satz: *Eine Prämienfunktion S ist genau dann mit dem Kollektiven Modell verträglich, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:*

(1) S *ist konkav*

(2) $\lim_{v \searrow 0} S(v)/v < \infty$

(3) $\lim_{v \to \infty}(S(v+1) - S(v)) = 0$

Sind $N \in \mathbb{N}_0$ *und* $X > 0$ *Zufallsvariablen mit* $S(v) = \mathrm{E}(N) \cdot \mathrm{E}(\min(X, v))$ *so gilt für die Schadenhöhenverteilung* F *von* X

$$F(v) = 1 - \frac{S'(v)}{S'(0)}. \qquad (S' \text{ rechtsseitige Ableitung})$$

Darstellbarkeit als Kollektives Modell

Folgerung: Die Prämienfunktion S_z aus der Riebesell-Formel ist nicht mit dem Kollektiven Modell verträglich, denn $\lim_{v \searrow 0} S_z(v)/v = +\infty$.

Das lässt sich jedoch leicht beheben:

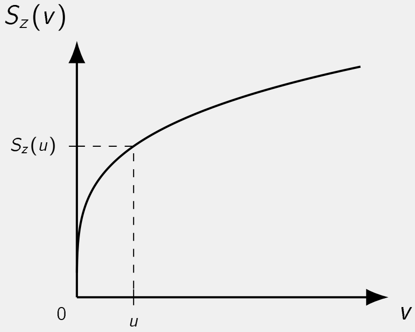
Wähle ein beliebig kleines $u > 0$, setze $s_u := S(u)$ und definiere

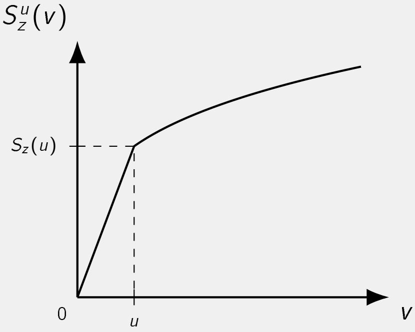
$$S_z^u(v) := \left\{ \begin{array}{ll} \frac{v}{u} \cdot S_z(u) & \text{für } 0 \leq v < u \\ S_z(v) & \text{für } v \geq u \end{array} \right\} = \begin{cases} s_u v/u & \text{für } 0 \leq v < u \\ s_u \left(\frac{v}{u}\right)^{\log_2(1+z)} & \text{für } v \geq u. \end{cases}$$

Dann ist S_z^u mit dem Kollektiven Modell verträglich und es gilt $S_z^u(v) = S_z(v)$ für alle $v \geq u$.

Wird $u < a$ gewählt, so kann man in bei der Zuschlagsquotierung $S_z(v)$ durch $S_z^u(v)$ ersetzen und erhält das gleiche Ergebniss.

Vergleich der Prämienfunktionen $S_z(v)$ und $S_z^u(v)$





Darstellbarkeit als Kollektives Modell

Korollar: *Die Prämienfunktion* S_z^u *gehört zu einem Kollektiven Modell, bei dem die bedingte Schadenhöhe* $X|\{X > u\}$ *Pareto-verteilt mit* $\alpha = 1 - \log_2(1 + z)$ *ist.*