

# Schadenversicherungsmathematik

## Teil 3: Schadenreservierung

Dr. Ulrich Riegel

Mathematisches Institut  
Ludwig-Maximilians-Universität München

Wintersemester 2023/24



# Inhalt

## Problemstellung

Abwicklungsmuster und Loss Development-Verfahren

Bedingte Erwartungen

Genauigkeit der Prognose

Zuwachsquoten-Verfahren (Additives Verfahren)

Chain Ladder-Verfahren

Bornhuetter-Ferguson-Verfahren

Cape Cod-Verfahren

Kreuzklassifizierte parametrische Verfahren

# Jeder Schaden hat eine Geschichte

- Verursachung des Schadens
- Eintritt des Schadens
- Manifestierung des Schadens
- Meldung des Schadens
- Prüfung
- Quantifizierung
- Regulierung = Entschädigung des Geschädigten

In vielen Fällen wird die komplette Prozesskette recht schnell durchlaufen (z.B. Sturmschaden, Bagatellschaden in KH).

# Jeder Schaden hat eine Geschichte

Bei großen (Kraftfahrt-)Haftpflichtschäden können manche Schritte aber sehr lange dauern:

- Zeit bis Manifestierung, z.B.
  - ▶ Fehler vom Statiker (Bauwerk)
  - ▶ Notar (Testament)
  - ▶ Hersteller (Produkthaftung)
  - ▶ Umweltschäden
- Prüfung/Quantifizierung wegen Gerichtsprozess, z.B.
  - ▶ D&O-Versicherung
  - ▶ Fälle wie das Stadtarchiv Köln
- Regulierung
  - ▶ bei schweren Personenschäden in KH/AH oft lebenslange Zahlungen für Verdienstaufschlag und Pflegekosten

## Arten von Reserven

### **Bemerkung:**

Am Ende jedes Geschäftsjahres gibt es folgende Arten von Schadenreserven:

- Individuelle Einzelfallreserven (case reserves) für Schäden, die dem Versicherungsunternehmen bekannt sind
- Reserven für die potentielle Schlechterabwicklung von bekannten Schäden (IBNER: incurred but not enough reserved)
- Reserven für Schäden, die dem VU noch nicht bekannt sind (IBNYR: incurred but not yet reported)

Die Summe aus IBNER- und IBNYR-Reserve wird als *IBNR-Reserve* bezeichnet.

# Bedeutung der Reserven

### **Bemerkung:**

Reserven spielen für Versicherungsunternehmen eine wichtige Rolle:

- Reserven sind nötig, damit ein Versicherungsunternehmen seine zukünftigen Verpflichtungen erfüllen kann.
- Reserven werden für das externe Reporting benötigt, insbesondere für die Bilanz und somit für die Steuer.
- Reserven werden für die interne Berichterstattung, Erfolgsmessung und die Prämienkalkulation gebraucht.

## Abwicklungsquadrat

Wir betrachten  $n$  Anfalljahre  $i = 1, \dots, n$  und gehen davon aus, dass alle Schäden nach  $n$  Abwicklungsjahren vollständig abgewickelt sind. Dann lässt sich die Schadenabwicklung durch ein Abwicklungsquadrat darstellen:

		Abwicklungsjahr				
		1	...	$k$	...	$n$
Anfalljahr	1	$S_{11}$	...	$S_{1k}$	...	$S_{1n}$
	⋮	⋮		⋮		⋮
	$i$	$S_{i1}$	...	$S_{ik}$	...	$S_{in}$
	⋮	⋮		⋮		⋮
	$n$	$S_{n1}$	...	$S_{nk}$	...	$S_{nn}$

## Abwicklungsquadrat

Hierbei beschreibt die Zufallsvariable  $S_{ik}$  den Gesamtbetrag der in Abwicklungsjahr  $k$  geleisteten Zahlungen für in Anfalljahr  $i$  eingetretene Schäden.

Die Summe  $i + k - 1$  beschreibt das Kalenderjahr, in dem die Zahlung  $S_{ik}$  erfolgt.

Informationsstand nach dem Kalenderjahr  $n$ :

- $S_{ik}$  bekannt für  $i + k - 1 \leq n$ , d.h. für das obere Dreieck
- $S_{ik}$  unbekannt für  $i + k - 1 > n$ , d.h. diese Zahlungen müssen prognostiziert werden



## Abwicklungsdreieck

Die bekannte Schadenabwicklung wird daher üblicherweise in einem *Abwicklungsdreieck* dargestellt:

		Abwicklungsjahr				
		1	...	$n - i + 1$	...	$n$
Anfalljahr	1	$S_{11}$	...	$S_{1,n-i+1}$	...	$S_{1n}$
	⋮	⋮		⋮	⋮	
	$i$	$S_{i1}$	...	$S_{i,n-i+1}$		
	⋮	⋮	⋮			
	$n$	$S_{n1}$				

## Problemstellung

**Ziel:** Prognose der  $S_{ik}$  mit  $i + k - 1 > n$ , d.h. Vervollständigen des Dreiecks zu einem Quadrat.

**Notation:** Wir verwenden folgende Bezeichnungen

$C_{ik} := S_{i1} + \dots + S_{ik}$	kumulierte Zahlungen, Stand nach $k$ Abwicklungsjahren
$C_{in} := S_{i1} + \dots + S_{in}$	kumulierte Zahlungen, ausreguliert (Ultimate)
$R_i := C_{in} - C_{i,n-i+1}$ $= S_{i,n-i+2} + \dots + S_{i,n}$	Reserve des Anfalljahres $i$

## Datenarten

### Bemerkung:

Neben den inkrementellen Zahlungen  $S_{ik}$  werden auch Abwicklungsdreiecke mit folgenden Daten betrachtet:

- Kumulierte Zahlungen  $C_{ik}$
- Angefallene Schäden (auch: *Schadenaufwand*), d.h. kumulierte Zahlungen + Einzelfallreserven, ebenfalls mit  $C_{ik}$  bezeichnet.  $S_{i,k} = C_{i,k} - C_{i,k-1}$  ist dann die Veränderung des Schadenaufwandes im  $k$ -ten Abwicklungsjahr. Die Differenz  $R_i = C_{in} - C_{i,n-i+1}$  ist dann die IBNR-Reserve des Anfalljahres  $i$ .
- Schadenzahl (gemeldete, offene, regulierte) und Schadendurchschnitt (Schadenhöhe, Regulierungshöhe, Einzelfallreserve). Ebenfalls mit  $S_{ik}$  im inkrementellen und mit  $C_{ik}$  im kumulierten Fall bezeichnet.

## Aufbereitung der Daten

### **Bemerkung:**

Wichtig ist

- die Bildung möglichst homogener Kollektive (d.h. Dreiecke) die so groß wie möglich sind (analog zur Tarifikalkulation),
- die Elimination/Berücksichtigung der monetären Inflation,
- die Verwendung eines guten Volumenmaßes  $v_i$ : (Soll-)Prämie, Policenzahl, Jahreseinheiten, Anzahl Schäden im ersten Abwicklungsjahr,
- die vorherige Elimination/Kappung von Großschäden.

# Inhalt

Problemstellung

Abwicklungsmuster und Loss Development-Verfahren

Bedingte Erwartungen

Genauigkeit der Prognose

Zuwachsquoten-Verfahren (Additives Verfahren)

Chain Ladder-Verfahren

Bornhuetter-Ferguson-Verfahren

Cape Cod-Verfahren

Kreuzklassifizierte parametrische Verfahren

## Abwicklungsmuster

Die meisten Modelle und Verfahren der Schadenreservierung beruhen auf der Vorstellung, dass die Abwicklung der Schäden über die Anfalljahre hinweg nach einem für alle Anfalljahre identischen Abwicklungsmuster erfolgt.

### Definition:

Ein Vektor  $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  mit  $\gamma_i > 0$  und  $\gamma_n = 1$  heißt *Abwicklungsmuster für Quoten*, wenn für alle  $i, k \in \{1, \dots, n\}$

$$\frac{E(C_{ik})}{E(C_{in})} = \gamma_k$$

gilt.

## Abwicklungsmuster

### Bemerkung:

Sei  $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  ein Abwicklungsmuster für Quoten. Wir setzen  $\vartheta_1 := \gamma_1$  und

$$\vartheta_k := \gamma_k - \gamma_{k-1} \quad \text{und} \quad \varphi_k := \gamma_k / \gamma_{k-1}$$

für  $k \geq 2$ . Dann gilt offenbar

$$\frac{E(S_{ik})}{E(C_{in})} = \vartheta_k \quad (k = 1, \dots, n), \quad \frac{E(C_{ik})}{E(C_{i,k-1})} = \varphi_k \quad (k = 2, \dots, n)$$

und  $(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n)$  heißt ein *Abwicklungsmuster für Anteile* und  $(\varphi_2, \dots, \varphi_n)$  ein *Abwicklungsmuster für Faktoren*.

## Loss Development-Verfahren

Beim *Loss Development-Verfahren* geht man davon aus, dass ein Abwicklungsmuster  $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  für Quoten vorliegt.

### Loss Development-Verfahren:

Sind a priori-Schätzer  $\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_n$  verfügbar, so heißt

$$\hat{C}_{ik} := \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_{n-i+1}} C_{i,n-i+1}$$

für  $i + k - 1 > n$  die *Loss Development-Prognose* für  $C_{ik}$ .



## Loss Development-Verfahren – Beispiel

$i$	$\hat{C}_{i1}$	$\hat{C}_{i2}$	$\hat{C}_{i3}$	$\hat{C}_{i4}$	$\hat{C}_{i5}$	$\hat{C}_{i6}$
1	4.370	6.293	10.292	12.460	13.660	14.307
2	2.701	5.291	7.162	8.945	9.338	
3	4.483	6.729	10.074	11.142		
4	3.254	5.804	8.351			
5	8.010	12.118				
6	5.582					


  

$\hat{\gamma}_k$	45%	65%	80%	90%	95%	100%
------------------	-----	-----	-----	-----	-----	------

Loss Development-Verfahren für ein konkretes Schadendreieck. Das verwendete Abwicklungsmuster  $\hat{\gamma} = (45\%, 65\%, 80\%, 90\%, 95\%, 100\%)$  wird als gegeben vorausgesetzt (aus externen Daten geschätzt).

## Loss Development-Verfahren – Beispiel


$i$	$\hat{C}_{i1}$	$\hat{C}_{i2}$	$\hat{C}_{i3}$	$\hat{C}_{i4}$	$\hat{C}_{i5}$	$\hat{C}_{i6}$
1	4.370	6.293	10.292	12.460	13.660	14.307
2	2.701	5.291	7.162	8.945	9.338	
3	4.483	6.729	10.074	11.142		
4	3.254	5.804	8.351			
5	8.010	12.118				
6	5.582	8.063				


  
 $\cdot 65/45$

$\hat{\gamma}_k$	45%	65%	80%	90%	95%	100%

## Loss Development-Verfahren – Beispiel


$i$	$\hat{C}_{i1}$	$\hat{C}_{i2}$	$\hat{C}_{i3}$	$\hat{C}_{i4}$	$\hat{C}_{i5}$	$\hat{C}_{i6}$
1	4.370	6.293	10.292	12.460	13.660	14.307
2	2.701	5.291	7.162	8.945	9.338	
3	4.483	6.729	10.074	11.142		
4	3.254	5.804	8.351			
5	8.010	12.118	14.914			
6	5.582	8.063	9.924			

  
 $\cdot 80/65$

$\hat{\gamma}_k$	45%	65%	80%	90%	95%	100%
------------------	-----	-----	-----	-----	-----	------

## Loss Development-Verfahren – Beispiel

$i$	$\hat{C}_{i1}$	$\hat{C}_{i2}$	$\hat{C}_{i3}$	$\hat{C}_{i4}$	$\hat{C}_{i5}$	$\hat{C}_{i6}$
1	4.370	6.293	10.292	12.460	13.660	14.307
2	2.701	5.291	7.162	8.945	9.338	9.829
3	4.483	6.729	10.074	11.142	11.761	12.380
4	3.254	5.804	8.351	9.395	9.917	10.439
5	8.010	12.118	14.914	16.779	17.711	18.643
6	5.582	8.063	9.924	11.164	11.784	12.404

  
 $\cdot 100/95$

$\hat{\gamma}_k$	45%	65%	80%	90%	95%	100%
------------------	-----	-----	-----	-----	-----	------

# Inhalt

Problemstellung

Abwicklungsmuster und Loss Development-Verfahren

**Bedingte Erwartungen**

Genauigkeit der Prognose

Zuwachsquoten-Verfahren (Additives Verfahren)

Chain Ladder-Verfahren

Bornhuetter-Ferguson-Verfahren

Cape Cod-Verfahren

Kreuzklassifizierte parametrische Verfahren

## Bedingte Erwartung

Bei der Berechnung des Prognosefehlers und auch bei der Definition des Chain Ladder-Modells wird mit bedingten Erwartungen gearbeitet. Im Folgenden nehmen wir Quadratintegrierbarkeit an.

**Definition:** Seien  $X, Y, Z$  Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  und sei  $\mathcal{Z} \subset \mathcal{A}$  eine Unter- $\sigma$ -Algebra. Dann gibt es eine (bis auf fast sichere Gleichheit) eindeutig bestimmte  $\mathcal{Z}$ -messbare Zufallsvariable  $E(X|\mathcal{Z})$ , so dass

$$\int_A X dP = \int_A E(X|\mathcal{Z}) dP \quad \text{für alle } A \in \mathcal{Z}.$$

$E(X|\mathcal{Z})$  heißt die *bedingte Erwartung von  $X$  unter der Hypothese  $\mathcal{Z}$*  und wird auch mit  $E^{\mathcal{Z}}(X)$  bezeichnet. Ist  $\mathcal{Z} = \sigma(Z)$  die von  $Z$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra, so schreibt man auch  $E(X|Z)$  statt  $E(X|\mathcal{Z})$ .

## Bedingte (Ko-)Varianz

### Definition:

Die bedingte Kovarianz ist definiert durch

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y|Z) &:= \text{Cov}^Z(X, Y) := E^Z \left[ (X - E^Z(X)) \cdot (Y - E^Z(Y)) \right] \\ &= E^Z(XY) - E^Z(X) \cdot E^Z(Y) \end{aligned}$$

und die bedingte Varianz durch

$$\begin{aligned} \text{Var}(X|Z) &:= \text{Var}^Z(X) := \text{Cov}^Z(X, X) \\ &= E^Z \left( (X - E^Z(X))^2 \right) \\ &= E^Z(X^2) - E^Z(X)^2. \end{aligned}$$

## Regeln für bedingte Erwartung

- (1) Die Zufallsvariable  $E(X|Z)$  ist auf  $\{Z = z\}$  konstant, d.h.  $E(X|Z)$  ist eine Funktion von  $Z$ .

Ist  $Z$  diskret, so folgt direkt mit der Definition

$$E(X|Z)|_{\{Z=z\}} = E(X|\{Z = z\})$$

für alle  $z$  mit  $P(\{Z = z\}) > 0$ .

Diese Eigenschaft spiegelt das Mitteln der bedingten Erwartung wieder und kann zur Definition bei diskreten Zufallsvariablen verwendet werden.



## Regeln für bedingte Erwartung

(2) Ist  $\mathcal{Y} \subset \mathcal{Z}$  eine weitere  $\sigma$ -Algebra, dann gilt

$$E^{\mathcal{Y}} ( E^{\mathcal{Z}}(X) ) = E^{\mathcal{Z}} ( E^{\mathcal{Y}}(X) ) = E^{\mathcal{Y}}(X).$$

Insbesondere gilt

$$E ( E(X|Y, Z)|Y ) = E(X|Y)$$

und

$$E ( E(X|Z) ) = E(X)$$

sowie

$$\text{Cov}^{\mathcal{Y}}(X, Y) = E^{\mathcal{Y}} ( \text{Cov}^{\mathcal{Z}}(X, Y) ) + \text{Cov}^{\mathcal{Y}} ( E^{\mathcal{Z}}(X), E^{\mathcal{Z}}(Y) )$$

und

$$\text{Var}^{\mathcal{Y}}(X) = E^{\mathcal{Y}} ( \text{Var}^{\mathcal{Z}}(X) ) + \text{Var}^{\mathcal{Y}} ( E^{\mathcal{Z}}(X) ).$$

## Regeln für bedingte Erwartung

(3) Sind  $Y, Z$   $\mathcal{Z}$ -messbar, dann gilt

$$E(Y \cdot X + Z \mid \mathcal{Z}) = Y \cdot E(X \mid \mathcal{Z}) + Z.$$

Insbesondere gilt

$$E(f(Z) \cdot X + g(Z) \mid Z) = f(Z) \cdot E(X \mid Z) + g(Z)$$

für messbare Funktionen  $f$  und  $g$ .

## Regeln für bedingte Erwartung

- (4) Sei  $\mathcal{Y} \subset \mathcal{A}$  eine weitere  $\sigma$ -Algebra, so dass  $X$  und  $\mathcal{Y}$  bedingt unabhängig unter der Hypothese  $\mathcal{Z}$  sind.

Dies ist z.B. erfüllt, wenn  $\mathcal{Y}$  und  $\{X, \mathcal{Z}\}$  unabhängig sind.

Dann gilt

$$E^{\sigma(\mathcal{Z}, \mathcal{Y})}(X) = E^{\mathcal{Z}}(X).$$

Insbesondere gilt

$$E^{\mathcal{Z}}(X) = E(X)$$

falls  $X$  und  $\mathcal{Z}$  unabhängig sind.

## Reguläre bedingte Verteilung

**Definition:** Es sei  $\mathcal{B}^1$  die Borelsche  $\sigma$ -Algebra in  $\mathbb{R}$ . Eine *reguläre bedingte Verteilung* von  $X$  unter der Hypothese  $\mathcal{Z}$  ist eine Abbildung

$$P^{X|\mathcal{Z}} : \Omega \times \mathcal{B}^1 \rightarrow [0, 1],$$

die folgende Bedingungen erfüllt:

- $B \mapsto P^{X|\mathcal{Z}}(\omega, B)$  ist für alle  $\omega \in \Omega$  ein  $W$ -Maß auf  $\mathcal{B}^1$
- $\omega \mapsto P^{X|\mathcal{Z}}(\omega, B)$  ist für alle  $B \in \mathcal{B}^1$  eine Version der bedingten Erwartung

$$P\{X \in B | \mathcal{Z}\} := E(1_{\{X \in B\}} | \mathcal{Z})$$

Für reellwertige Zufallsvariablen existiert immer eine reguläre bedingte Verteilung und ist bis auf fast sichere Gleichheit eindeutig.

## Reguläre bedingte Verteilung

**Beachte:** Aus der Definition folgt für alle  $A \in \mathcal{Z}$

$$\begin{aligned}
 \int_A P^{X|Z}(\cdot, B) dP &= \int_A E(1_{\{X \in B\}} | \mathcal{Z}) dP \\
 &= \int_A 1_{\{X \in B\}} dP = P(A \cap \{X \in B\}) \\
 &= P(A) \cdot P(\{X \in B\} | A).
 \end{aligned}$$

Mittelt man  $P^{X|Z}(\cdot, B)$  über ein  $A \in \mathcal{Z}$  mit  $P(A) > 0$ , dann erhält man also  $P(\{X \in B\} | A)$ .

Die Zufallsvariable  $P^{X|Z}(\cdot, B)$  ist für alle  $B \in \mathcal{B}^1$  auf  $\{Z = z\}$  konstant. Daher ist das  $W$ -Maß  $P^{X|Z}(\omega, \cdot)$  für alle  $\omega \in \{Z = z\}$  gleich. Es wird mit  $P^{X|Z=z}$  bezeichnet. Für diskretes  $Z$  gilt  $P^{X|Z=z}(B) = P(\{X \in B\} | \{Z = z\})$ .

# Inhalt

Problemstellung

Abwicklungsmuster und Loss Development-Verfahren

Bedingte Erwartungen

**Genauigkeit der Prognose**

Zuwachsquoten-Verfahren (Additives Verfahren)

Chain Ladder-Verfahren

Bornhuetter-Ferguson-Verfahren

Cape Cod-Verfahren

Kreuzklassifizierte parametrische Verfahren

## Mean Squared Error

Es bezeichne  $\mathcal{D}$  die  $\sigma$ -Algebra, die durch die beobachtbaren Schadenstände erzeugt wird, d.h.

$$\mathcal{D} := \sigma\{C_{ik} \mid i + k - 1 \leq n\}.$$

**Definition:** Sei  $X$  eine Linearkombination der Zufallsvariablen  $C_{ik}$ ,  $i, k \in \{1, \dots, n\}$  und sei  $\hat{X}$  eine  $\mathcal{D}$ -messbarer Prognose für  $X$ . Dann heißt

$$\text{mse}_{X|\mathcal{D}}(\hat{X}) := E\left((X - \hat{X})^2 \mid \mathcal{D}\right)$$

die (*bedingte*) *mittlere quadratische Abweichung* oder der (*conditional*) *mean squared error* der Prognose  $\hat{X}$ . Die Quadratwurzel

$$\text{s. e.}_{X|\mathcal{D}}(\hat{X}) := \sqrt{\text{mse}_{X|\mathcal{D}}(\hat{X})}$$

heißt der (*bedingte*) *Standardfehler* der Prognose  $\hat{X}$ .

## Mean Squared Error

Meistens interessiert man sich für die Genauigkeit einer Prognose der Reserve eines Anfalljahres, d.h.  $X = R_i$  oder der Gesamtreserve, d.h.  $X = R := \sum_{i=1}^n R_i$ .

### Beachte:

Ist  $\widehat{R}_i$  eine Prognose für  $R_i$  und ist  $\widehat{C}_{in} := C_{i,n-i+1} + \widehat{R}_i$  die zugehörige Prognose für  $C_{in}$ , dann gilt

$$\text{mse}_{R_i|\mathcal{D}}(\widehat{R}_i) = \mathbb{E} \left( (R_i - \widehat{R}_i)^2 \mid \mathcal{D} \right) = \mathbb{E} \left( (C_{in} - \widehat{C}_{in})^2 \mid \mathcal{D} \right) = \text{mse}_{C_{in}|\mathcal{D}}(\widehat{C}_{in})$$

und ebenso

$$\text{mse}_{R|\mathcal{D}}(\widehat{R}) = \text{mse}_{\sum_{i=1}^n C_{in}|\mathcal{D}} \left( \sum_{i=1}^n \widehat{C}_{in} \right).$$



## Schätz- und Zufallsfehler

Da  $\hat{X}$   $\mathcal{D}$ -messbar ist, gilt

$$\begin{aligned}
 \text{mse}_{X|\mathcal{D}}(\hat{X}) &= \mathbb{E} \left( (X - \hat{X})^2 \mid \mathcal{D} \right) \\
 &= \mathbb{E} \left( (X - \mathbb{E}(X \mid \mathcal{D}) + \mathbb{E}(X \mid \mathcal{D}) - \hat{X})^2 \mid \mathcal{D} \right) \\
 &= \mathbb{E} \left( (X - \mathbb{E}(X \mid \mathcal{D}))^2 \mid \mathcal{D} \right) + \mathbb{E} \left( (\mathbb{E}(X \mid \mathcal{D}) - \hat{X})^2 \mid \mathcal{D} \right) \\
 &\quad + 2 \cdot \underbrace{\mathbb{E} \left( (X - \mathbb{E}(X \mid \mathcal{D})) (\mathbb{E}(X \mid \mathcal{D}) - \hat{X}) \mid \mathcal{D} \right)}_{= 0 \text{ da } \hat{X} \text{ } \mathcal{D}\text{-messbar ist}} \\
 &= \text{Var}(X \mid \mathcal{D}) + (\mathbb{E}(X \mid \mathcal{D}) - \hat{X})^2.
 \end{aligned}$$

Die mittlere quadratische Abweichung  $\text{mse}_{X|\mathcal{D}}(\hat{X})$  ist also die Summe aus dem *Zufallsfehler*  $\text{Var}(X \mid \mathcal{D})$  und dem *Schätzfehler*  $(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{D}) - \hat{X})^2$ .

# Inhalt

Problemstellung

Abwicklungsmuster und Loss Development-Verfahren

Bedingte Erwartungen

Genauigkeit der Prognose

**Zuwachsquoten-Verfahren (Additives Verfahren)**

Chain Ladder-Verfahren

Bornhuetter-Ferguson-Verfahren

Cape Cod-Verfahren

Kreuzklassifizierte parametrische Verfahren

## Zuwachsquoten-Verfahren

Das *Zuwachsquoten-Verfahren* wird auch als *Additives Verfahren* bezeichnet.

Für das Verfahren werden Volumenmaße

$$v_1, \dots, v_n$$

für die Anfalljahre  $i = 1, \dots, n$  benötigt (z.B. Prämie oder Anzahl Fahrzeuge), die als bekannt vorausgesetzt werden.

Das Verfahren ist durch das folgende stochastische Modell motiviert.

## Modellannahmen des Zuwachsqoten-Verfahren

Die Modellannahmen des *Zuwachsqoten-Verfahren* lauten

(ZQ1) Die Zuwächse  $S_{ik}$ ,  $1 \leq i, k \leq n$ , sind unabhängig.

(ZQ2) Es gibt Parameter  $m_k \in \mathbb{R}$ , so dass für  $1 \leq i, k \leq n$  gilt

$$E(S_{ik}) = m_k \cdot v_i.$$

(ZQ3) Es gibt Parameter  $s_k > 0$ , so dass für  $1 \leq i, k \leq n$  gilt

$$\text{Var}(S_{ik}) = s_k^2 \cdot v_i.$$

**Beachte:** Die Inkremente  $S_{ik}$ ,  $1 \leq i \leq n + 1 - k$  des Abwicklungsjahres  $k$  erfüllen die Annahmen des individuellen Modells!

## Parameterschätzung im Additiven Modell

Daher kennen wir erwartungstreue Schätzer für  $m_k$  und  $s_k^2$ :

**Bemerkung:** Im Zuwachsquotenmodell haben wir erwartungstreue Schätzer

$$\hat{m}_k := \frac{\sum_{i=1}^{n+1-k} S_{ik}}{\sum_{i=1}^{n+1-k} v_i}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

$$\hat{s}_k^2 := \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n+1-k} v_i \left( \frac{S_{ik}}{v_i} - \hat{m}_k \right)^2, \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

Für  $s_n^2$  verwendet man meist die Extrapolation

$$\hat{s}_n^2 := \min \{ \hat{s}_k^2 \mid 1 \leq k \leq n-1 \} \quad \text{oder} \quad \hat{s}_n^2 := \min \left( \frac{(\hat{s}_{n-1}^2)^2}{\hat{s}_{n-2}^2}, \hat{s}_{n-2}^2 \right)$$

(i.A. nicht erwartungstreu).

## Zuwachsqoten-Verfahren

### Zuwachsqoten-Verfahren:

Unter Verwendung dieser Schätzer erhalten wir die *Prognosen des Zuwachsqoten-Verfahrens*:

$$\hat{S}_{ik} := \hat{m}_k \cdot v_i, \quad i + k > n + 1,$$

$$\hat{R}_i := (\hat{m}_{n+2-i} + \cdots + \hat{m}_n) \cdot v_i, \quad i > 1.$$

### Beachte:

Die  $\hat{R}_i$  sind dann erwartungstreue Schätzer für  $E(R_i | \mathcal{D}) = E(R_i)$ , d.h. es gilt

$$E(\hat{R}_i) = E(R_i).$$

## Zuwachsquoten-Verfahren – Beispiel

$i$	$v_i$	$\hat{S}_{i1}$	$\hat{S}_{i2}$	$\hat{S}_{i3}$	$\hat{S}_{i4}$	$\hat{S}_{i5}$	$\hat{S}_{i6}$	$\hat{C}_{i6}$
1	13.085	4.370	1.923	3.999	2.168	1.200	647	14.307
2	14.285	2.701	2.590	1.871	1.783	393		
3	16.114	4.483	2.246	3.345	1.068			
4	15.142	3.254	2.550	2.547				
5	16.905	8.010	4.108					
6	20.224	5.582						

Wir wenden das additive Verfahren auf die Daten von Folie 17 an. Hierbei muss man die inkrementellen Größen  $S_{ik}$  verwenden. Das extern geschätzte Abwicklungsmuster  $\hat{\gamma}$  wird nicht benötigt, dafür brauchen wir Volumenmaße  $v_i$ .

## Zuwachsquoten-Verfahren – Beispiel

$i$	$v_i$	$\hat{S}_{i1}$	$\hat{S}_{i2}$	$\hat{S}_{i3}$	$\hat{S}_{i4}$	$\hat{S}_{i5}$	$\hat{S}_{i6}$	$\hat{C}_{i6}$
1	13.085	4.370	1.923	3.999	2.168	1.200	647	14.307
2	14.285	2.701	2.590	1.871	1.783	393		
3	16.114	4.483	2.246	3.345	1.068			
4	15.142	3.254	2.550	2.547				
5	16.905	8.010	4.108					
6	20.224	5.582						

$$\frac{\sum_{i=1}^6 \hat{S}_{i1}}{\sum_{i=1}^6 v_i}$$

$$\hat{m}_k = 29,7\%$$



### Zuwachsquoten-Verfahren – Beispiel

$i$	$v_i$	$\hat{S}_{i1}$	$\hat{S}_{i2}$	$\hat{S}_{i3}$	$\hat{S}_{i4}$	$\hat{S}_{i5}$	$\hat{S}_{i6}$	$\hat{C}_{i6}$
1	13.085	4.370	1.923	3.999	2.168	1.200	647	14.307
2	14.285	2.701	2.590	1.871	1.783	393		
3	16.114	4.483	2.246	3.345	1.068			
4	15.142	3.254	2.550	2.547				
5	16.905	8.010	4.108					
6	20.224	5.582						

$$\frac{\sum_{i=1}^5 S_{i2}}{\sum_{i=1}^5 v_i}$$

$\hat{m}_k$     29,7%    17,8%

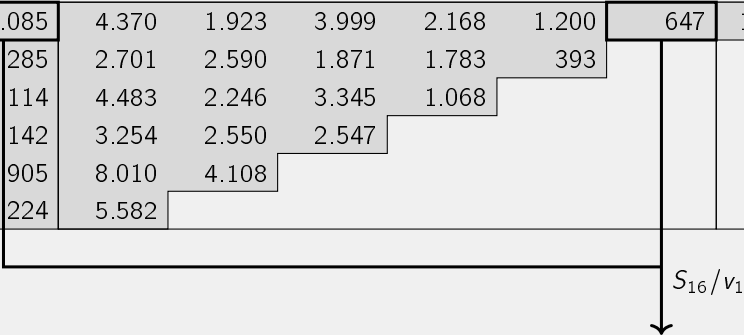
### Zuwachsquoten-Verfahren – Beispiel

$i$	$v_i$	$\hat{S}_{i1}$	$\hat{S}_{i2}$	$\hat{S}_{i3}$	$\hat{S}_{i4}$	$\hat{S}_{i5}$	$\hat{S}_{i6}$	$\hat{C}_{i6}$
1	13.085	4.370	1.923	3.999	2.168	1.200	647	14.307
2	14.285	2.701	2.590	1.871	1.783	393		
3	16.114	4.483	2.246	3.345	1.068			
4	15.142	3.254	2.550	2.547				
5	16.905	8.010	4.108					
6	20.224	5.582						

$\hat{m}_k$	29,7%	17,8%	20,1%	11,5%	5,8%	4,9%
-------------	-------	-------	-------	-------	------	------

$S_{16}/v_1$



## Zuwachsqoten-Verfahren – Beispiel

$i$	$v_i$	$\hat{S}_{i1}$	$\hat{S}_{i2}$	$\hat{S}_{i3}$	$\hat{S}_{i4}$	$\hat{S}_{i5}$	$\hat{S}_{i6}$	$\hat{C}_{i6}$
1	13.085	4.370	1.923	3.999	2.168	1.200	647	14.307
2	14.285	2.701	2.590	1.871	1.783	393		
3	16.114	4.483	2.246	3.345	1.068			
4	15.142	3.254	2.550	2.547		881		
5	16.905	8.010	4.108					
6	20.224	5.582		4.057				

$\hat{m}_k$	29,7%	17,8%	20,1%	11,5%	5,8%	4,9%
-------------	-------	-------	-------	-------	------	------

Diagramm zur Veranschaulichung der Zuweisungen: Pfeile zeigen die Zuweisung von  $\hat{S}_{i4}$  zu  $\hat{S}_{i5}$  (881) und von  $\hat{S}_{i3}$  zu  $\hat{S}_{i4}$  (4.057). Ein weiterer Pfeil zeigt die Zuweisung von  $\hat{S}_{i2}$  zu  $\hat{S}_{i3}$  (4.057).

## Zuwachsquoten-Verfahren – Beispiel

$i$	$v_i$	$\hat{S}_{i1}$	$\hat{S}_{i2}$	$\hat{S}_{i3}$	$\hat{S}_{i4}$	$\hat{S}_{i5}$	$\hat{S}_{i6}$	$\hat{C}_{i6}$
1	13.085	4.370	1.923	3.999	2.168	1.200	647	14.307
2	14.285	2.701	2.590	1.871	1.783	393	706	10.044
3	16.114	4.483	2.246	3.345	1.068	938	797	12.877
4	15.142	3.254	2.550	2.547	1.748	881	749	11.729
5	16.905	8.010	4.108	3.392	1.951	984	836	19.281
6	20.224	5.582	3.593	4.057	2.334	1.177	1.000	17.743

$$\hat{m}_k \quad \boxed{29,7\% \quad 17,8\% \quad 20,1\% \quad 11,5\% \quad 5,8\% \quad 4,9\%}$$

## Prognosefehler der Reserve eines Anfalljahres

### Prognosefehler der Reserve eines Anfalljahres:

Für die mittlere quadratische Abweichung  $\text{mse}_{R_i|\mathcal{D}}(\widehat{R}_i)$  haben wir folgenden Schätzer:

$$\widehat{\text{mse}}_{R_i|\mathcal{D}}(\widehat{R}_i) = \sum_{k=n-i+2}^n \widehat{S}_k^2 \cdot v_i \cdot \left( 1 + \frac{v_i}{\sum_{j=1}^{n+1-k} v_j} \right).$$

### Prognosefehler der Gesamtreserve:

Für die mittlere quadratische Abweichung  $\text{mse}(\widehat{R})$  der Gesamtreserve  $R$  haben wir folgenden Schätzer:

$$\widehat{\text{mse}}_{R|\mathcal{D}}(\widehat{R}) = \sum_{k=2}^n \widehat{S}_k^2 \cdot \left( \sum_{j=n-k+2}^n v_j \right) \cdot \left( 1 + \frac{\sum_{j=n-k+2}^n v_j}{\sum_{j=1}^{n+1-k} v_j} \right).$$

## Zuwachsqoten-Verfahren – Beispiel

$i$	$v_i$	$\hat{C}_{i1}$	$\hat{C}_{i2}$	$\hat{C}_{i3}$	$\hat{C}_{i4}$	$\hat{C}_{i5}$	$\hat{C}_{i6}$	$\widehat{s.e.}(\hat{R}_i)$
1	13.085	4.370	6.293	10.292	12.460	13.660	14.307	0
2	14.285	2.701	5.291	7.162	8.945	9.338	10.044	804
3	16.114	4.483	6.729	10.074	11.142	12.080	12.877	1.224
4	15.142	3.254	5.804	8.351	10.099	10.980	11.729	1.455
5	16.905	8.010	12.118	15.510	17.461	18.445	19.281	2.034
6	20.224	5.582	9.175	13.232	15.566	16.743	17.743	2.445

$\hat{m}_k$	29,7%	17,8%	20,1%	11,5%	5,8%	4,9%
$\hat{s}_k^2$	165,9	27,4	76,7	36,6	28,1	21,6

Standardfehler der Gesamtreserve  $\hat{R} = \sum_{i=2}^6 \hat{R}_i$ :  $\widehat{s.e.}_{R|D}(\hat{R}) = 5.421$ .

# Inhalt

Problemstellung

Abwicklungsmuster und Loss Development-Verfahren

Bedingte Erwartungen

Genauigkeit der Prognose

Zuwachsquoten-Verfahren (Additives Verfahren)

**Chain Ladder-Verfahren**

Bornhuetter-Ferguson-Verfahren

Cape Cod-Verfahren

Kreuzklassifizierte parametrische Verfahren

## Chain Ladder-Verfahren

Statt  $C_{in} = S_{i1} + \dots + S_{in}$  wie im Additiven Modell verwenden wir nun eine multiplikative, auf Faktoren basierende Darstellung:

$$C_{in} = C_{i1} \cdot F_{i1} \cdot \dots \cdot F_{i,n-1} \text{ mit } F_{ik} := \frac{C_{i,k+1}}{C_{ik}}.$$

Hierzu wird  $C_{ik} \neq 0$  benötigt. Übertragung früherer Erfahrung auf spätere Jahre bedeutet in diesem Zusammenhang dann  $E(F_{ik} \mid C_{i1}, \dots, C_{ik}) = f_k$  (unabhängig von  $i$ ).

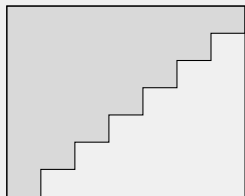
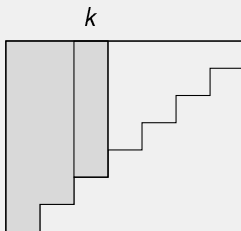
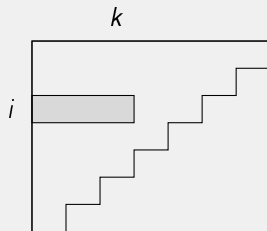


## Verfahren und Modell

Im Folgenden verwenden wir die  $\sigma$ -Algebren

$$\mathcal{B}_{ik} := \sigma\{C_{i1}, \dots, C_{ik}\} \quad \text{und}$$

$$\mathcal{D}_k := \sigma\{C_{ij} \mid 1 \leq i+j-1 \leq n, j \leq k\}.$$


 $\mathcal{D}$ 

 $\mathcal{D}_k$ 

 $\mathcal{B}_{ik}$

## Chain Ladder-Modell (Mack)

Die Annahmen des Chain Ladder-Modells lauten

(CL1) Die Anfalljahre (d.h. die Vektoren  $(C_{i1}, \dots, C_{in})$ ,  $1 \leq i \leq n$ ) sind unabhängig.

(CL2) Es gibt Parameter  $f_1, \dots, f_{n-1} > 0$  (*Abwicklungsfaktoren*), so dass

$$E(F_{ik} | \mathcal{B}_{ik}) = f_k$$

für  $1 \leq i \leq n$  und  $1 \leq k \leq n - 1$  gilt.

(CL3) Es gibt Parameter  $\alpha \in \{0, 1, 2\}$  und  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} > 0$ , so dass

$$\text{Var}(F_{ik} | \mathcal{B}_{ik}) = \frac{\sigma_k^2}{C_{ik}^\alpha}$$

für  $1 \leq i \leq n$  und  $1 \leq k \leq n - 1$  gilt.

## Chain Ladder-Modell (Mack)

### Bemerkung:

Mit der Notation  $S_{i,k+1} = C_{i,k+1} - C_{i,k}$  ist (CL2) äquivalent zu

$$E(S_{i,k+1} \mid \mathcal{B}_{ik}) = (f_k - 1) \cdot C_{ik}.$$

Die Annahmen des Zuwachsquoten- und des Chain Ladder-Verfahrens sind also grundsätzlich verschieden (abgesehen davon, dass beide Modelle die Existenz von Abwicklungsmustern annehmen).

Insbesondere sind im Chain Ladder-Modell die Inkremente eines Anfalljahres nicht unabhängig.

## Schätzer

### Bemerkung:

Da die  $F_{ik}$  (bedingt) erwartungstreue Schätzer für  $f_k$  sind, verwenden wir den Schätzer

$$\hat{f}_k = \sum_{i=1}^{n-k} \frac{C_{ik}^\alpha}{\sum_{j=1}^{n-k} C_{jk}^\alpha} F_{ik} = \begin{cases} \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n-k} F_{ik}, & \text{falls } \alpha = 0 \\ \frac{\sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k+1}}{\sum_{i=1}^{n-k} C_{ik}}, & \text{falls } \alpha = 1 \\ \frac{\sum_{i=1}^{n-k} C_{ik} C_{i,k+1}}{\sum_{i=1}^{n-k} C_{ik}^2}, & \text{falls } \alpha = 2 \end{cases}$$

um die (bedingte) Varianz zu minimieren.

## Chain Ladder-Verfahren

### Chain Ladder-Verfahren:

Für  $k > n - i + 1$  heißen

$$\widehat{C}_{ik} = C_{i,n-i+1} \cdot \widehat{f}_{n-i+1} \cdot \dots \cdot \widehat{f}_{k-1}$$

die *Chain Ladder-Prognosen* für die zukünftigen Abwicklungsstände  $C_{ik}$  und

$$\widehat{R}_i = \widehat{C}_{in} - C_{i,n-i+1}$$

heißt die *Chain Ladder-Reserve* für das Anfalljahr  $i$ .

### Bemerkung:

Die Chain Ladder-Prognose  $\widehat{C}_{in}$  benutzt *nicht* die Abwicklungsstände  $C_{i1}, \dots, C_{i,n-i}$ .

# Chain Ladder-Verfahren

## Bemerkungen:

- Das Chain Ladder-Verfahren ist die am häufigsten angewendete IBNR-Methode in der Versicherungswirtschaft (international).
- Als Chain Ladder wird meist nur der Fall  $\alpha = 1$  verstanden.
- Die Schätzer  $\hat{f}_k$  werden als *Chain Ladder-Faktoren* (oder auch *age to age factors* oder *link ratios*) bezeichnet.

## Chain Ladder-Verfahren

### Bemerkungen:

- Wir wollen nicht  $E(R_i)$  schätzen sondern

$$E(R_i | \mathcal{D}) = E(C_{in} - C_{i,n-i+1} | \mathcal{D}) = E(C_{in} | \mathcal{D}) - C_{i,n-i+1},$$

da  $E(R_i) = E(E(R_i | \mathcal{D}))$  auch über alle möglichen Realisierungen des Dreiecks mittelt, die nicht eingetreten sind.

- In Extremfällen ist  $E(C_{in}) < C_{i,n-i+1}$  auch in Fällen möglich, in denen immer  $C_{i,n-i+1} \leq C_{in}$  gilt (z.B.  $C_{ik}$  kumulierte Zahlungen, keine Regresse).
- Auch im additiven Modell interessiert man sich eigentlich für  $E(R_i | \mathcal{D})$ . Jedoch gilt hier  $E(R_i | \mathcal{D}) = E(R_i)$  da die Inkremente  $S_{jk}$  unabhängig sind.

## Chain Ladder-Verfahren – Beispiel

Wir wenden nun das Chain Ladder-Verfahren mit  $\alpha = 1$  auf die Daten von Folie 17 an. Hier werden weder das extern geschätzte Abwicklungsmuster  $\hat{\gamma}$  noch Volumenmaße benötigt.

$i$	$\hat{C}_{i1}$	$\hat{C}_{i2}$	$\hat{C}_{i3}$	$\hat{C}_{i4}$	$\hat{C}_{i5}$	$\hat{C}_{i6}$
1	4.370	6.293	10.292	12.460	13.660	14.307
2	2.701	5.291	7.162	8.945	9.338	
3	4.483	6.729	10.074	11.142		
4	3.254	5.804	8.351			
5	8.010	12.118				
6	5.582					



### Chain Ladder-Verfahren – Beispiel

$i$	$\hat{C}_{i1}$	$\hat{C}_{i2}$	$\hat{C}_{i3}$	$\hat{C}_{i4}$	$\hat{C}_{i5}$	$\hat{C}_{i6}$
1	4.370	6.293	10.292	12.460	13.660	14.307
2	2.701	5.291	7.162	8.945	9.338	
3	4.483	6.729	10.074	11.142		
4	3.254	5.804	8.351			
5	8.010	12.118				
6	5.582					

$$\frac{\sum_{i=1}^5 C_{i2}}{\sum_{i=1}^5 C_{i1}}$$

↓

$\hat{f}_k$	1,588
-------------	-------

### Chain Ladder-Verfahren – Beispiel

$i$	$\hat{C}_{i1}$	$\hat{C}_{i2}$	$\hat{C}_{i3}$	$\hat{C}_{i4}$	$\hat{C}_{i5}$	$\hat{C}_{i6}$
1	4.370	6.293	10.292	12.460	13.660	14.307
2	2.701	5.291	7.162	8.945	9.338	
3	4.483	6.729	10.074	11.142		
4	3.254	5.804	8.351			
5	8.010	12.118				
6	5.582					

$$\frac{\sum_{i=1}^4 C_{i3}}{\sum_{i=1}^4 C_{i2}}$$

$\hat{f}_k$	1,588	1,488
-------------	-------	-------

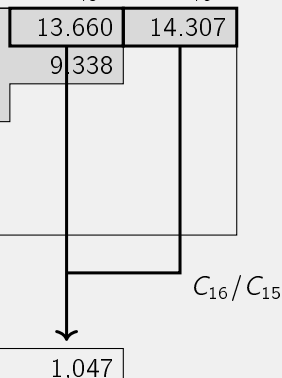
### Chain Ladder-Verfahren – Beispiel

$i$	$\hat{C}_{i1}$	$\hat{C}_{i2}$	$\hat{C}_{i3}$	$\hat{C}_{i4}$	$\hat{C}_{i5}$	$\hat{C}_{i6}$
1	4.370	6.293	10.292	12.460	13.660	14.307
2	2.701	5.291	7.162	8.945	9.338	
3	4.483	6.729	10.074	11.142		
4	3.254	5.804	8.351			
5	8.010	12.118				
6	5.582					

$\hat{f}_k$	1,588	1,488	1,182	1,074	1,047
-------------	-------	-------	-------	-------	-------

$C_{16}/C_{15}$



### Chain Ladder-Verfahren – Beispiel

$i$	$\hat{C}_{i1}$	$\hat{C}_{i2}$	$\hat{C}_{i3}$	$\hat{C}_{i4}$	$\hat{C}_{i5}$	$\hat{C}_{i6}$
1	4.370	6.293	10.292	12.460	13.660	14.307
2	2.701	5.291	7.162	8.945	9.338	
3	4.483	6.729	10.074	11.142		
4	3.254	5.804	8.351			
5	8.010	12.118				
6	5.582	8.864				

  
· 1,588

$\hat{f}_k$	1,588	1,488	1,182	1,074	1,047
-------------	-------	-------	-------	-------	-------

### Chain Ladder-Verfahren – Beispiel

$i$	$\hat{C}_{i1}$	$\hat{C}_{i2}$	$\hat{C}_{i3}$	$\hat{C}_{i4}$	$\hat{C}_{i5}$	$\hat{C}_{i6}$
1	4.370	6.293	10.292	12.460	13.660	14.307
2	2.701	5.291	7.162	8.945	9.338	
3	4.483	6.729	10.074	11.142		
4	3.254	5.804	8.351			
5	8.010	12.118	18.028			
6	5.582	8.864	13.187			

  
 $\cdot 1,488$

$\hat{f}_k$	1,588	1,488	1,182	1,074	1,047

### Chain Ladder-Verfahren – Beispiel

$i$	$\hat{C}_{i1}$	$\hat{C}_{i2}$	$\hat{C}_{i3}$	$\hat{C}_{i4}$	$\hat{C}_{i5}$	$\hat{C}_{i6}$
1	4.370	6.293	10.292	12.460	13.660	14.307
2	2.701	5.291	7.162	8.945	9.338	9.780
3	4.483	6.729	10.074	11.142	11.971	12.538
4	3.254	5.804	8.351	9.874	10.608	11.111
5	8.010	12.118	18.028	21.315	22.901	23.986
6	5.582	8.864	13.187	15.592	16.752	17.546

  
 $\cdot 1,047$

$\hat{f}_k$	1,588	1,488	1,182	1,074	1,047

## Chain Ladder-Modell

**Satz:** Aus den Annahmen (CL1) und (CL2) folgt

$$E(C_{in} | \mathcal{D}) = C_{i,n-i+1} \cdot f_{n-i+1} \cdot \dots \cdot f_{n-1}.$$

**Satz:** Die Chain Ladder-Faktoren  $\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_{n-1}$  sind bedingt erwartungstreu und bedingt unkorreliert. Genauer:

$$E(\hat{f}_k | \mathcal{D}_k) = f_k \quad \text{und} \quad E(\hat{f}_j \cdot \hat{f}_k | \mathcal{D}_j) = E(\hat{f}_j | \mathcal{D}_j) \cdot E(\hat{f}_k | \mathcal{D}_j) \quad \text{für } j < k.$$

Ferner sind  $\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_{n-1}$  erwartungstreu und unkorreliert, und es gilt

$$E\left(\hat{f}_{n-i+1} \cdot \dots \cdot \hat{f}_{n-1} \mid \mathcal{D}_{n-i+1}\right) = f_{n-i+1} \cdot \dots \cdot f_{n-1}.$$

## Chain Ladder-Modell

### Satz:

Die Chain Ladder-Reserve  $\widehat{R}_i$  ist  $\mathcal{D}_{n-i+1}$ -bedingt erwartungstreu. Genauer gilt

$$E(\widehat{R}_i \mid \mathcal{D}_{n-i+1}) = E(R_i \mid \mathcal{D}_{n-i+1}).$$



## Genauigkeit der Chain Ladder-Prognose

Zur Schätzung der mittleren quadratischen Abweichung  $\text{mse}_{R_i|\mathcal{D}}(\hat{R}_i)$  benötigen wir Schätzer für die Varianzparameter  $\sigma_k^2$  der Modellannahme (CL3). Analog zu dem Varianzschätzer im Individuellen Modell gilt, dass

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{n-k-1} \sum_{i=1}^{n-k} C_{ik}^\alpha (F_{ik} - \hat{f}_k)^2, \quad 1 \leq k \leq n-2$$

ein  $\mathcal{D}_k$ -bedingt erwartungstreuer Schätzer für  $\sigma_k^2$  ist. Da wir so keinen Schätzer für  $\sigma_{n-1}^2$  erhalten, verwenden wir die Extrapolation

$$\hat{\sigma}_{n-1}^2 = \min \left( \frac{(\hat{\sigma}_{n-2}^2)^2}{\hat{\sigma}_{n-3}^2}, \hat{\sigma}_{n-3}^2 \right).$$

## Genauigkeit der Chain Ladder-Prognose

### Prognosefehler der Reserve eines Anfalljahres:

Wir haben folgenden Schätzer für die bedingte mittlere quadratische Abweichung  $\widehat{\text{mse}}_{R_i|\mathcal{D}}(\widehat{R}_i)$  der Chain Ladder-Reserve  $\widehat{R}_i$ :

$$\begin{aligned} \widehat{\text{mse}}_{R_i|\mathcal{D}}(\widehat{R}_i) &= \sum_{k=n-i+1}^{n-1} \widehat{C}_{ik}^2 \left( \frac{\widehat{\sigma}_k^2}{\widehat{C}_{ik}^\alpha} + \frac{\widehat{\sigma}_k^2}{\sum_{j=1}^{n-k} C_{jk}^\alpha} \right) \cdot \widehat{f}_{k+1}^2 \cdot \dots \cdot \widehat{f}_{n-1}^2 \\ &= \widehat{C}_{in}^2 \sum_{k=n-i+1}^{n-1} \frac{\widehat{\sigma}_k^2}{\widehat{f}_k^2} \left( \frac{1}{\widehat{C}_{ik}^\alpha} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{n-k} C_{jk}^\alpha} \right) \end{aligned}$$

mit  $\widehat{C}_{ik} = C_{i,n-i+1} \cdot \widehat{f}_{n-i+1} \cdot \dots \cdot \widehat{f}_{k-1}$  für  $k \geq n - i + 1$ .

## Genauigkeit der Chain Ladder-Prognose

Beachte, dass die Schätzer  $\hat{f}_k^2$  für  $f_k^2$  nicht (bedingt) erwartungstreu sind. Stattdessen könnte man auch die  $\mathcal{D}_k$ -bedingt erwartungstreuen Schätzer  $\hat{f}_k^2 - \frac{\hat{\sigma}_k^2}{\sum_{i=1}^{n-k} C_{ik}^\alpha}$  verwenden (dieser kann allerdings negativ werden).

Die Gesamtreserve für alle Jahre  $R = R_2 + \dots + R_n$  wird natürlich durch  $\hat{R} = \hat{R}_2 + \dots + \hat{R}_n$  geschätzt. Man hat folgenden Schätzer für die mittlere quadratische Abweichung von  $\hat{R}$ :

### Prognosefehler der Gesamtreserve:

Die mittlere quadratische Abweichung der Chain Ladder-Gesamtreserve kann man schätzen durch

$$\widehat{\text{mse}}_{R|\mathcal{D}}(\hat{R}) = \sum_{i=2}^n \left\{ \widehat{\text{mse}}_{R_i|\mathcal{D}}(\hat{R}_i) + \hat{C}_{in} \cdot \left( \sum_{j=i+1}^n \hat{C}_{jn} \right) \cdot \sum_{k=n-i+1}^{n-1} \frac{2 \cdot \hat{\sigma}_k^2 / \hat{f}_k^2}{\sum_{l=1}^{n-k} C_{lk}^\alpha} \right\}$$

## Genauigkeit der Chain Ladder-Reserveschätzung

### Beachte:

- Da die  $\hat{R}_i$  über die  $\hat{f}_k$  positiv korreliert sind, gilt

$$\widehat{\text{mse}}_{R|\mathcal{D}} \left( \sum_{i=2}^n \hat{R}_i \right) > \sum_{i=2}^n \widehat{\text{mse}}_{R|\mathcal{D}}(\hat{R}_i).$$

- Zur Wahl des Parameters  $\alpha$  kann man einen Residuenplot heranziehen (oder einfach  $\alpha = 1$  wählen).

### Chain Ladder-Verfahren – Beispiel

$i$	$\hat{C}_{i1}$	$\hat{C}_{i2}$	$\hat{C}_{i3}$	$\hat{C}_{i4}$	$\hat{C}_{i5}$	$\hat{C}_{i6}$	$\widehat{\text{s.e.}}(C_{in})$
1	4.370	6.293	10.292	12.460	13.660	14.307	0
2	2.701	5.291	7.162	8.945	9.338	9.780	255
3	4.483	6.729	10.074	11.142	11.971	12.538	599
4	3.254	5.804	8.351	9.874	10.608	11.111	992
5	8.010	12.118	18.028	21.315	22.901	23.986	2.332
6	5.582	8.864	13.187	15.592	16.752	17.546	2.851

$\hat{f}_k$	1,588	1,488	1,182	1,074	1,047
$\hat{\sigma}_k^2$	167,7	82,3	49,4	14,3	4,1

Standardfehler der Gesamtreserve  $\hat{R} = \sum_{i=2}^6 \hat{R}_i$ :  $\widehat{\text{s.e.}}_{R|\mathcal{D}}(\hat{R}) = 4.639$ .

# Überprüfung der Chain Ladder-Modellannahmen

## Bemerkungen:

- Überprüfung der zentralen Modellannahme (CL2) durch Plotten der  $S_{i,k+1}$  oder  $C_{i,k+1}$  gegen die vorangehenden Schadenstände  $C_{ik}$ . (Ein Plot pro Abwicklungsjahr  $k$ .)
- *Kalenderjahreseffekte* sind Besonderheiten, die die Abwicklungsfaktoren eines Kalenderjahres beeinflussen. Beispiele sind Änderungen in der Rechtsprechung, Inflation oder Datenprobleme durch Systemänderungen. Kalenderjahreseffekte sind für die Modellannahme (CL1) problematisch. Überprüfung auf Kalenderjahreseffekte durch Plotten der Residuen

$$\hat{r}_{ik} = \frac{C_{i,k+1} - C_{ik} \cdot \hat{f}_k}{C_{ik}^{1-\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}_k}$$

gegen das Kalenderjahr  $i + k$ .

## Reduktion der Parameterzahl

### Bemerkungen:

- Die  $\ln(\hat{\sigma}_k^2)$  sind in der Praxis häufig näherungsweise linear fallend in  $k$ .
- Die Annahme  $\sigma_k^2 = \sigma^2 \cdot e^{-ck}$  für  $1 \leq k \leq n-1$  (oder äquivalent  $\text{Var}(C_{i,k+1} | \mathcal{B}_{ik}) = C_{ik}^{2-\alpha} \cdot \sigma^2 \cdot e^{-ck}$  für alle  $i$ ), hat keinen Einfluss auf die Schätzung der  $f_k$ , reduziert aber die Anzahl der Varianz-Parameter von  $n-1$  auf die zwei Parameter  $\sigma^2$  and  $c$ .
- Die Schätzer  $\hat{f}_{n-1}, \hat{f}_{n-2}, \hat{f}_{n-3}, \hat{f}_{n-4}$  beruhen auf 1, 2, 3 bzw. 4 Datenpunkten, können aber großen Einfluss auf die Schätzung der Gesamtreserve  $R$  haben.
- Die  $\hat{f}_k - 1$  sind für  $k \geq k_0$  häufig ebenfalls loglinear in  $k$ . Die Annahme  $f_k = 1 + a \cdot e^{-bk}$  (für  $k \geq k_0$ ) reduziert die Parameterzahl und glättet die Prognosen der Schadenabwicklung.

Diese Anmerkungen lassen sich leicht auf das additive Modell übertragen.

## Verfahrensauswahl

In der Praxis ist man häufig in der Situation, dass für keines der verfügbaren Modelle alle Modellannahmen perfekt passen. Man muss sich aber für eine Methode entscheiden.

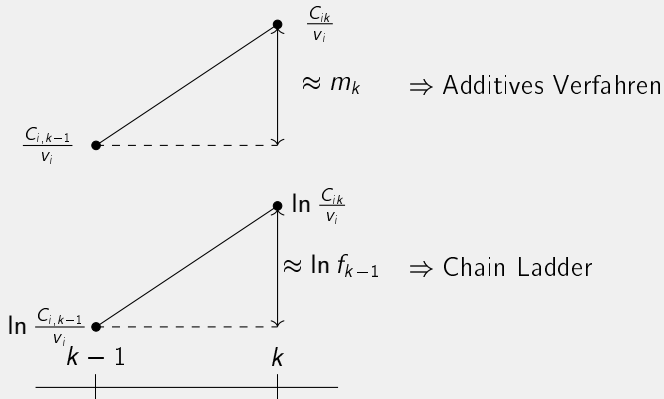
Additives Modell:  $\frac{C_{ik}}{V_i} - \frac{C_{i,k-1}}{V_i} = \frac{S_{ik}}{V_i} \stackrel{!}{\approx} m_k$  unabhängig von  $i$ , d.h. der Zuwachs der Schadenquote eines fixierten Abwicklungsjahres  $k$  ist für alle Anfalljahre  $i$  ähnlich

Chain Ladder:  $\ln \frac{C_{ik}}{V_i} - \ln \frac{C_{i,k-1}}{V_i} = \ln \frac{C_{ik}}{C_{i,k-1}} \stackrel{!}{\approx} \ln f_{k-1}$  unabhängig von  $i$ , d.h. Zuwachs der logarithmierten Schadenquote eines festen Abwicklungsjahres  $k$  ist für alle Anfalljahre  $i$  ähnlich.



## Verfahrensauswahl

Analysiere daher welcher der beiden Plots (bei festem  $k$ ) für alle Anfalljahre näherungsweise parallel sind.



## Verfahrensauswahl

- Oft ist es jedoch auch anhand der Plots nicht klar, welches Modell besser passt.
- Daher ist es manchmal besser zu überlegen, welches Modell für die vorliegende Situation plausibler ist.
- Dominiert der IBNER, so spricht vieles für Chain Ladder.
- Dominiert hingegen der IBNYR, so kann das additive Modell die bessere Wahl sein.

# Inhalt

Problemstellung

Abwicklungsmuster und Loss Development-Verfahren

Bedingte Erwartungen

Genauigkeit der Prognose

Zuwachsquoten-Verfahren (Additives Verfahren)

Chain Ladder-Verfahren

**Bornhuetter-Ferguson-Verfahren**

Cape Cod-Verfahren

Kreuzklassifizierte parametrische Verfahren

## Bornhuetter-Ferguson-Verfahren

Das Bornhuetter-Ferguson-Verfahren ist eine weit verbreitete Reservierungsmethode, insbesondere in den USA.

### Ausgangspunkt:

Die Chain Ladder-Reserve  $\widehat{R}_i^{\text{CL}} = C_{i,n-i+1}(\widehat{f}_{n-i+1} \cdots \widehat{f}_{n-1} - 1)$  liefert ein unsinniges Ergebnis wenn  $C_{i,n-i+1} = 0$  (oder ansonsten untypisch) ist.

Das ist in der Rückversicherung für  $i = n$  oder  $i = n - 1$  nicht ungewöhnlich.

## Bornhuetter-Ferguson-Verfahren

Wir setzen voraus, dass es ein Abwicklungsmuster für Quoten  $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  gibt und dass Schätzer  $\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_n$  mit  $\hat{\gamma}_n = 1$  vorliegen. Ferner gehen wir davon aus, dass Schätzer  $\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_n$  für die erwarteten Endschadenstände  $\alpha_i := E(C_{in})$  vorliegen.

### Bornhuetter-Ferguson-Verfahren:

Dann heißen für  $k > n - i + 1$

$$\hat{C}_{ik} := C_{i,n-i+1} + (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{n-i+1})\hat{\alpha}_i$$

die *Bornhuetter-Ferguson-Prognosen* für  $C_{ik}$  und

$$\hat{R}_i := (\hat{\gamma}_n - \hat{\gamma}_{n-i+1})\hat{\alpha}_i$$

die *Bornhuetter-Ferguson-Reserve* für das Anfalljahr  $i$ .

# Bornhuetter-Ferguson-Verfahren

## Bemerkungen:

- Die Bornhuetter-Ferguson-Prognose  $\widehat{C}_{in}$  weicht im Allgemeinen von dem (a priori-) Schätzer  $\widehat{\alpha}_i$  für  $\alpha_i = E(C_{in})$  ab.  $\widehat{C}_{in}$  ist ja schließlich auch ein Schätzer für  $E(C_{in} | \mathcal{D})$ .
- Die Schätzer  $\widehat{\gamma}_k$  und  $\widehat{\alpha}_i$  können sowohl aus dem Schadendreieck geschätzt werden als auch aus externer Information.
- So wird in der Praxis das Abwicklungsmuster oft mit Chain Ladder aus dem Dreieck geschätzt, d.h.

$$\widehat{\gamma}_k = \widehat{\gamma}_k^{\text{CL}} := \frac{1}{\widehat{f}_k \cdots \widehat{f}_{n-1}}.$$

- Die Schätzer  $\widehat{\alpha}_1, \dots, \widehat{\alpha}_n$  für die erwarteten Endschadenstände kommen häufig aus der Tarifierung.

## Bornhuetter-Ferguson-Verfahren – Beispiel

Wir wenden nun das Bornhuetter-Ferguson-Verfahren auf die Daten von Folie 17 an. Hierbei verwenden wir das gleiche Abwicklungsmuster  $\hat{\gamma}$ . Zusätzlich werden noch a-priori Endschadenstände  $\hat{\alpha}_i$  benötigt.

$i$	$\hat{C}_{i1}$	$\hat{C}_{i2}$	$\hat{C}_{i3}$	$\hat{C}_{i4}$	$\hat{C}_{i5}$	$\hat{C}_{i6}$	$\hat{\alpha}_i$
1	4.370	6.293	10.292	12.460	13.660	14.307	11.678
2	2.701	5.291	7.162	8.945	9.338		12.142
3	4.483	6.729	10.074	11.142			13.423
4	3.254	5.804	8.351				12.871
5	8.010	12.118					15.088
6	5.582						18.394

$\hat{\gamma}_k$	45%	65%	80%	90%	95%	100%
------------------	-----	-----	-----	-----	-----	------

## Bornhuetter-Ferguson-Verfahren – Beispiel

$i$	$\hat{S}_{i1}$	$\hat{S}_{i2}$	$\hat{S}_{i3}$	$\hat{S}_{i4}$	$\hat{S}_{i5}$	$\hat{S}_{i6}$	$\hat{\alpha}_i$
1	4.370	1.923	3.999	2.168	1.200	647	11.678
2	2.701	2.590	1.871	1.783	393		12.142
3	4.483	2.246	3.345	1.068			13.423
4	3.254	2.550	2.547	1.287			12.871
5	8.010	4.108					15.088
6	5.582				920		18.394

45%	20%	15%	10%	5%	5%	$\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{k-1}$
-----	-----	-----	-----	----	----	---------------------------------------

Diagram illustrating the Bornhuetter-Ferguson method. The table shows the estimated values  $\hat{S}_{ij}$  for  $i=1, \dots, 6$  and  $j=1, \dots, 6$ . The values are calculated based on the initial estimate  $\hat{S}_{i1}$  and the difference  $\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{k-1}$  (shown in the bottom table). The values for  $\hat{S}_{i4}$  and  $\hat{S}_{i5}$  are highlighted in boxes, and arrows indicate the flow of information from the bottom table to these values.



## Bornhuetter-Ferguson-Verfahren – Beispiel

$i$	$\hat{S}_{i1}$	$\hat{S}_{i2}$	$\hat{S}_{i3}$	$\hat{S}_{i4}$	$\hat{S}_{i5}$	$\hat{S}_{i6}$	$\hat{\alpha}_i$
1	4.370	1.923	3.999	2.168	1.200	647	11.678
2	2.701	2.590	1.871	1.783	393	607	12.142
3	4.483	2.246	3.345	1.068	671	671	13.423
4	3.254	2.550	2.547	1.287	644	644	12.871
5	8.010	4.108	2.263	1.509	754	754	15.088
6	5.582	3.679	2.759	1.839	920	920	18.394

45%

20%

15%

10%

5%

5%

$\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{k-1}$

## Bornhuetter-Ferguson-Verfahren – Beispiel

$i$	$\hat{C}_{i1}$	$\hat{C}_{i2}$	$\hat{C}_{i3}$	$\hat{C}_{i4}$	$\hat{C}_{i5}$	$\hat{C}_{i6}$	$\hat{\alpha}_i$
1	4.370	6.293	10.292	12.460	13.660	14.307	11.678
2	2.701	5.291	7.162	8.945	9.338	9.945	12.142
3	4.483	6.729	10.074	11.142	11.813	12.484	13.423
4	3.254	5.804	8.351	9.638	10.282	10.925	12.871
5	8.010	12.118	14.381	15.890	16.644	17.399	15.088
6	5.582	9.261	12.020	13.859	14.779	15.699	18.394

$\hat{\gamma}_k$	45%	65%	80%	90%	95%	100%

## Bornhuetter-Ferguson-Prinzip

Durch geeignete Wahl der Schätzer  $\hat{\gamma}_k$  und  $\hat{\alpha}_i$  erhält man die meisten gängigen IBNR-Verfahren aus dem Bornhuetter-Ferguson-Verfahrens, z.B.

Loss Development-Verfahren:  $\hat{\gamma}_k$  gegeben,  $\hat{\alpha}_i := C_{i,n-i+1}/\hat{\gamma}_{n-i+1}$

Additives Verfahren: 
$$\hat{\gamma}_k := \frac{\hat{m}_1 + \dots + \hat{m}_k}{\hat{m}_1 + \dots + \hat{m}_n},$$

$$\hat{\alpha}_i := v_i \cdot (\hat{m}_1 + \dots + \hat{m}_n)$$

Chain Ladder-Verfahren:  $\hat{\gamma}_k := (\hat{f}_k \cdot \dots \cdot \hat{f}_{n-1})^{-1}$ ,  $\hat{\alpha}_i := C_{i,n-i+1}/\hat{\gamma}_{n-i+1}$

**Beachte:** Additives Verfahren und Chain Ladder-Verfahren lassen sich als Spezialfälle interpretieren, *nicht* jedoch die zugehörigen stochastischen Modelle!

Ein weiterer Spezialfall ist das Cape Cod-Verfahren, das im Anschluss vorgestellt wird.

# Inhalt

Problemstellung

Abwicklungsmuster und Loss Development-Verfahren

Bedingte Erwartungen

Genauigkeit der Prognose

Zuwachsquoten-Verfahren (Additives Verfahren)

Chain Ladder-Verfahren

Bornhuetter-Ferguson-Verfahren

**Cape Cod-Verfahren**

Kreuzklassifizierte parametrische Verfahren

## Cape Cod-Verfahren

Das Cape Cod-Verfahren verwendet (wie das additive Verfahren) Volumenmaße  $v_1, \dots, v_n$ , die als bekannt vorausgesetzt werden.

Wir nehmen wieder an, dass es ein Abwicklungsmuster für Quoten  $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  gibt und dass Schätzer  $\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_n$  mit  $\hat{\gamma}_n = 1$  vorliegen.

**Cape Cod-Verfahren:** Dann heißt

$$\hat{\kappa} := \frac{\sum_{i=1}^n C_{i,n-i+1}}{\sum_{i=1}^n \hat{\gamma}_{n-i+1} v_i}$$

die *Cape Cod-Schadenquote*. Für  $k > n - i + 1$  heißen

$$\hat{C}_{ik} := C_{i,n-i+1} + (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{n-i+1}) \cdot \hat{\kappa} v_i$$

die *Cape Cod-Prognosen* für  $C_{ik}$ .

## Cape Cod-Verfahren

### Bemerkungen:

- Das Cape Cod-Verfahren erhält man also als Spezialfall des Bornhuetter-Ferguson-Verfahrens, indem man  $\hat{\alpha}_i := \hat{\kappa} v_i$  verwendet.
- Als Abwicklungsmuster wird in der Praxis meist das Chain Ladder-Abwicklungsmuster verwendet.

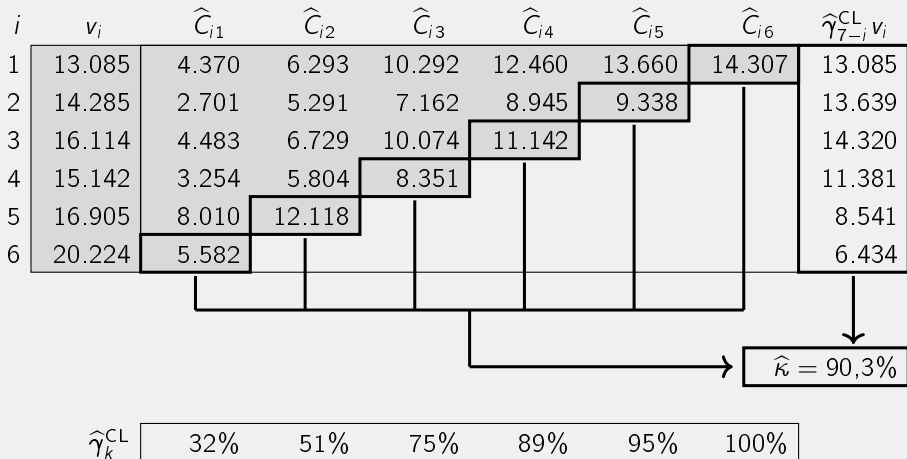
## Cape Cod-Verfahren – Beispiel

Für die Daten von Folie 17 betrachten wir das Cape Cod-Verfahren unter Verwendung des Chain Ladder-Abwicklungsmusters.

$i$	$v_i$	$\hat{C}_{i1}$	$\hat{C}_{i2}$	$\hat{C}_{i3}$	$\hat{C}_{i4}$	$\hat{C}_{i5}$	$\hat{C}_{i6}$
1	13.085	4.370	6.293	10.292	12.460	13.660	14.307
2	14.285	2.701	5.291	7.162	8.945	9.338	
3	16.114	4.483	6.729	10.074	11.142		
4	15.142	3.254	5.804	8.351			
5	16.905	8.010	12.118				
6	20.224	5.582					

$\hat{\gamma}_k^{CL}$	32%	51%	75%	89%	95%	100%
-----------------------	-----	-----	-----	-----	-----	------

## Cape Cod-Verfahren – Beispiel





## Cape Cod-Verfahren – Beispiel

$i$	$v_i$	$\hat{S}_{i1}$	$\hat{S}_{i2}$	$\hat{S}_{i3}$	$\hat{S}_{i4}$	$\hat{S}_{i5}$	$\hat{S}_{i6}$	$\hat{K}v_i$
1	13.085	4.370	1.923	3.999	2.168	1.200	647	11.811
2	14.285	2.701	2.590	1.871	1.783	393		12.894
3	16.114	4.483	2.246	3.345	1.068			14.545
4	15.142	3.254	2.550	2.547	1.873			13.668
5	16.905	8.010	4.108					15.259
6	20.224	5.582						18.255

$\hat{\gamma}_k^{\text{CL}} - \hat{\gamma}_{k-1}^{\text{CL}}$	32%	19%	25%	14%	7%	5%
---	-----	-----	-----	-----	----	----

## Cape Cod-Verfahren – Beispiel

$i$	$v_i$	$\hat{S}_{i1}$	$\hat{S}_{i2}$	$\hat{S}_{i3}$	$\hat{S}_{i4}$	$\hat{S}_{i5}$	$\hat{S}_{i6}$	$\hat{K}v_i$
1	13.085	4.370	1.923	3.999	2.168	1.200	647	11.811
2	14.285	2.701	2.590	1.871	1.783	393	583	12.894
3	16.114	4.483	2.246	3.345	1.068	962	658	14.545
4	15.142	3.254	2.550	2.547	1.873	904	618	13.668
5	16.905	8.010	4.108	3.760	2.091	1.009	690	15.259
6	20.224	5.582	3.415	4.498	2.502	1.207	826	18.255

$\hat{\gamma}_k^{\text{CL}} - \hat{\gamma}_{k-1}^{\text{CL}}$	32%	19%	25%	14%	7%	5%
---	-----	-----	-----	-----	----	----

## Cape Cod-Verfahren – Beispiel

$i$	$v_i$	$\hat{C}_{i1}$	$\hat{C}_{i2}$	$\hat{C}_{i3}$	$\hat{C}_{i4}$	$\hat{C}_{i5}$	$\hat{C}_{i6}$	$\hat{K}v_i$
1	13.085	4.370	6.293	10.292	12.460	13.660	14.307	11.811
2	14.285	2.701	5.291	7.162	8.945	9.338	9.921	12.894
3	16.114	4.483	6.729	10.074	11.142	12.104	12.762	14.545
4	15.142	3.254	5.804	8.351	10.224	11.128	11.746	13.668
5	16.905	8.010	12.118	15.878	17.969	18.978	19.668	15.259
6	20.224	5.582	8.997	13.495	15.997	17.204	18.029	18.255

$\hat{\gamma}_k^{CL}$	32%	51%	75%	89%	95%	100%
-----------------------	-----	-----	-----	-----	-----	------

# Inhalt

Problemstellung

Abwicklungsmuster und Loss Development-Verfahren

Bedingte Erwartungen

Genauigkeit der Prognose

Zuwachsquoten-Verfahren (Additives Verfahren)

Chain Ladder-Verfahren

Bornhuetter-Ferguson-Verfahren

Cape Cod-Verfahren

Kreuzklassifizierte parametrische Verfahren

## Kreuzklassifizierte Verfahren

- Wir setzen voraus, dass es ein Abwicklungsmuster für Quoten  $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  gibt. Sei  $(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n)$  das zugehörige Abwicklungsmuster für Anteile, d.h.

$$\vartheta_1 := \gamma_1, \quad \vartheta_k := \gamma_k - \gamma_{k-1}$$

für  $k > 1$ .

- Ferner setzen wir  $\alpha_i := E(C_{in})$  für  $i = 1, \dots, n$ . Dann gilt

$$E(S_{ik}) = \alpha_i \cdot \vartheta_k$$

für  $i, k = 1, \dots, n$ .

## Kreuzklassifizierte Verfahren

- Bei zusätzlich angenommener Unabhängigkeit (und Positivität) der  $S_{ik}$  kann die Schätzung von  $\alpha_j$  und  $\gamma_k$  wie bei den kreuzklassifizierten Ausgleichsverfahren behandelt werden (mit  $v_{ik} = 1$ ).
- Die Parameter  $\alpha_j, \vartheta_k$  werden dann auf Basis des Dreiecks mit Maximum Likelihood geschätzt.

Als Beispiel betrachten wir das Poisson-Modell.

## Kreuzklassifiziertes Poisson-Modell

**Satz:** Die  $S_{ik}$  seien unabhängig und es gelte  $S_{ik} \sim \text{Poi}(\alpha_i \vartheta_k)$ . Dann sind die Likelihoodgleichungen durch die Dreiecks-Marginalsummengleichungen

$$\sum_{k=1}^{n-i+1} \alpha_i \vartheta_k = \sum_{k=1}^{n-i+1} S_{ik}, \quad (1 \leq i \leq n)$$

$$\sum_{i=1}^{n-k+1} \alpha_i \vartheta_k = \sum_{i=1}^{n-k+1} S_{ik} \quad (1 \leq k \leq n)$$

gegeben. Die Chain Ladder-Prognosen  $\hat{\alpha}_i := \hat{C}_{in}$  und das Chain Ladder-Abwicklungsmuster

$$\hat{\vartheta}_1 := \hat{\gamma}_1, \quad \hat{\vartheta}_k := \hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{k-1} \quad (k > 1) \quad \text{mit} \quad \hat{\gamma}_k := \frac{1}{\hat{f}_k \cdot \dots \cdot \hat{f}_{n-1}}$$

lösen die Likelihoodgleichungen. Die zugehörigen Schätzer  $\hat{\alpha}_i \hat{\vartheta}_k$  für  $E(S_{ik})$  stimmen für  $k > n - i + 1$  mit den Chain Ladder-Prognosen  $\hat{S}_{ik}$  überein.