

Eine Revolution der Messtechnik

Aus der Reihe FIDS! - Forschung in die Schule! Fakultät für Physik der LMU München



Dr. Cecilia Scorza

Koordinatorin

### Inhalt

| 1    | Frequenzkämme: Eine Revolution der Messtechnik                 | 3    |
|------|--|------|
|      | 1.1 Frequenzkämme und Frequenzmessung                          | 3    |
|      | 1.2 Bedeutung der Frequenzmessung                              | 5    |
| 2    | Klassische Frequenzmessungen                                   | 8    |
|      | 2.1 Zählende Zeitmessungen                                     | 8    |
|      | 2.2 Zählende Frequenzmessungen                                 | 8    |
|      | 2.3 Frequenzmessung mithilfe von Schwebungen                   | 9    |
| 3    | Optische Frequenzkämme   | . 15 |
|      | 3.1 Femtosekundenlaser   | . 15 |
|      | 3.2 Frequenzkämme und Laserpulse                               | . 25 |
|      | 3.3 Experimentelle Verwirklichung von optischen Frequenzkämmen | . 32 |
| 4    | Aktuelle Entwicklungen   | . 35 |
| 5    | Anwendung von Frequenzkämmen: Uhrenvergleich                   | . 35 |
|      | 5.1 Experimenteller Aufbau und Durchführung                    | . 35 |
|      | 5.2 Frequenzvergleich  | . 36 |
| Lite | oraturverzeichnis  | 38   |

### Das Programm "Forschung in die Schule" (FIDS!)

Mit unserem Programm "Forschung in die Schule!" (FIDS!) haben wir uns an der Fakultät für Physik der LMU als Ziel gesetzt, einen anschaulichen und schulgerechten Einblick in die aktuelle Forschung an der LMU-Physik zu ermöglichen, und dadurch die Neugier und den Forschungsdrang unter Schülerinnen und Schülern, sowie ihr Interesse für die Physik zu wecken. Darüber hinaus möchten wir vermitteln, wie verlässliche Erkenntnisse mittels nachprüfbarer Experimente, kritischen Hinterfragens und rationalen Denkens gewonnen werden. Wir laden Lehrkräfte ganz herzlich ein, unsere Materialien im Rahmen von W-Seminaren und Projekttagen umzusetzen!

Autor Florian Linder (Montessorischule Biberkor) Koordinatorin Dr. Cecilia Scorza (LMU München) Lavout und Cover Christoph Hohmann (LMU München)

Herausgeber & Kontakt ViSdP: Dr. Cecilia Scorza

Tel: 089 / 2180 - 6147 E-Mail: c.scorza@lmu.de

LMU München, Fakultät für Physik Schellingstraße 4, 80799 München



### Einleitung

ie Frequenzkammtechnik, die von Prof. Hänsch, LMU München, am Ende der 90er Jahre des letzten Jahrhunderts entwickelt wurde, hat die Messtechnik in vielen Bereichen revolutioniert. Für die Entwicklung dieser Technik haben Theodor W. Hänsch und John L. Hall im Jahr 2005 gemeinsam mit Roy J. Glauber den Nobelpreis für Physik erhalten.¹ Mit Frequenzkämmen lassen sich Frequenzen und Zeitspannen genauer als jede andere physikalische Größe messen. Dies ermöglicht eine beispiellose Genauigkeit in einer Vielfalt an Experimenten. Mit den dadurch möglichen hochpräzisen Messungen können z.B. die großen Theorien der Quantenelektrodynamik oder die Allgemeine Relativitätstheorie auf Her(t)z und Niere geprüft werden. Vielleicht wird man aber auch neue Phänomene entdecken, die uns noch tiefere Einblicke in die Funktionsweise der Natur liefern.

# 1 Frequenzkämme: Eine Revolution der Messtechnik

n diesem Artikel wird zuerst auf die Relevanz von Frequenzkämmen für die Messtechnik eingegangen und anschließend wird Schritt für Schritt die Funktionsweise erarbeitet. Ziel ist es, möglichst tiefe und verständliche Einblicke in die Frequenzkammtechnik zu vermitteln. Der Weg führt durch die wunderbare Welt der Schwingungen und Wellen, in die nebenbei tiefere Einblicke gegeben werden.

Für das Verständnis dieses Textes genügt die Schulmathematik— auf die Methoden der höheren Mathematik wird bewusst verzichtet. Technische (schul-)mathematische Abschnitte sind mit einem Sternchen (\*) markiert und können übersprungen werden — sie sind für mathematisch interessierte Leser gedacht. Zudem werden die Erläuterungen von anschaulichen Simulationen und Aufgaben begleitet, die für ein tiefergehendes Verständnis hilfreich sind.

### 1.1 Frequenzkämme und Frequenzmessung

Unter Frequenzkämmen kann man sich so etwas wie sehr genaue "Frequenzlineale" vorstellen – also höchst feine "Meterstäbe" zum Messen von Frequenzen. Mit diesen Frequenz-Messgeräten können auf relativ einfache Weise optische Frequenzen mit beispielloser Genauigkeit bestimmt werden.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Theodor W. Hänsch und John L. Hall erhielten die eine Hälfte des Nobelpreises für ihre "Beiträge zur Entwicklung der auf Laser gegründeten Präzisionsspektroskopie, einschließlich der optischen Frequenzkammtechnik". Roy J. Glauber erhielt die andere Hälfte für seinen "Beitrag zur quantenmechanischen Theorie der optischen Kohärenz".

Frequenzen zu messen ist eigentlich relativ einfach: Man muss dafür nur Zeit messen und zählen können. Zählt man beispielsweise 3.000 Schwingungen in einer Minute, so erhält man 50 (=3.000/60) Schwingungen pro Sekunde, was einer Frequenz von 50 Hz entspricht. Dieses Prinzip ist für Frequenzmessungen immer das gleiche – egal ob man mechanische, akustische oder elektromagnetische Schwingungen betrachtet.

Wenn man sich nicht verzählt, ist die Genauigkeit der Frequenzmessung durch die Genauigkeit der Zeitmessung gegeben. Und Zeiten können mit modernen Atomuhren mit einer unglaublichen Genauigkeit gemessen werden. Die elektronische Zähltechnik kommt aber bei zu großen Frequenzen an ihre Grenzen: Diese Grenze ist bei Frequenzen im Gigahertz (GHz)<sup>2</sup> Bereich erreicht. So können langwellige elektromagnetische Radiowellen bis hin zu Mikrowellen noch "gezählt" werden, bei optischen elektromagnetischen Wellen, die Frequenzen im Bereich von einigen 100 Terahertz (THz)<sup>3</sup> haben, ist dies nicht mehr möglich.

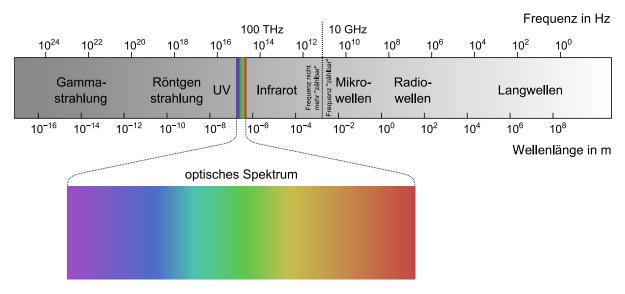


Abb. 1: Elektromagnetisches Spektrum. Frequenzen bis zu einigen GHz können noch elektronisch "gezählt" werden. Darüberliegende Frequenzen im optischen Bereich können mit der Frequenzkammtechnik genau vermessen werden.

Es war zwar vor der Entwicklung der Frequenzkammtechnik bereits gelungen, optische Frequenzen mit sogenannten "Frequenzketten" zu vermessen. Dabei wird eine bekannte Mikrowellenfrequenz einer Atomuhr durch mehrfache Frequenzvervielfachung auf eine bekannte optische Frequenz erhöht, die zum Vergleich mit der unbekannten optischen Frequenz verwendet wird. Im Gegensatz zum Frequenzkamm funktioniert diese Technik aber nur für eine bestimmte Frequenz und ist mit einem immensen experimentellen Aufwand verbunden. Die Experimente dafür füllten mehrere Labore und waren wegen ihrer Komplexität so fehleranfällig, dass sie nur wenige Minuten am Stück verwendet werden konnten. Aufgrund des hohen experimentellen und finanziellen Aufwands konnten sich nur wenige Labore den Betrieb einer solchen Frequenzkette leisten.

Die Frequenzkammtechnik ermöglicht nun einerseits, sehr hohe Frequenzen im optischen Bereich auf einfache Weise zu vermessen. Andererseits ermöglicht die Frequenzkammtechnik den Bau von sehr genauen optischen Atomuhren, die die Zeit noch genauer als Cäsium-Atomuhren messen können. Hierdurch wurde eine Vielzahl an Experimenten ermöglicht, die in einen bisher noch nicht erkundeten Bereich der Physik vordringen können.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Ein GHz entspricht einer Milliarde (10<sup>9</sup>) Schwingungen pro Sekunde.

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup> Ein THz entspricht einer Billiarde (10<sup>12</sup>) Schwingungen pro Sekunde.

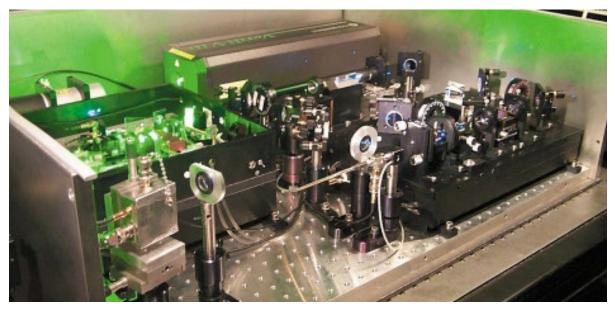


Abb. 2: Ein auf einem Titan-Saphir-Femtosekundenlaser beruhender Frequenzkamm. Vor der Entwicklung der Frequenzkammtechnik haben Experimente, die Frequenzen im optischen Bereich sehr genau messen, mehrere Forschungslabore gefüllt. Moderne faserbasierte Frequenzkämme passen heutzutage sogar in einen Schuhkarton. (Quelle: Udem 2002B)

### 1.2 Bedeutung der Frequenzmessung

Wenn man tiefer in die Physik eintaucht, stößt man immer wieder auf Schwingungen und Wellen. Im Physikunterricht der Schule lernt man bereits mechanische Schwingungen und Wellen kennen, man beschäftigt sich mit Tönen und akustischen Wellen und lernt, dass Licht elektromagnetische Wellen sind. Wenn man sich im Physikstudium mit der Quantenmechanik beschäftigt, wird sogar Materie zur Welle: Je genauer ein Physiker hinsieht, desto mehr fängt alles an zu schwingen. So ist es nicht verwunderlich, dass die Frequenz - die wichtigste Größe einer Schwingung – in der Physik eine sehr bedeutende Rolle spielt.

Frequenzmessungen können aber nicht nur zur Vermessung von Schwingungen und Wellen verwendet werden, sie dienen auch zur Messung ganz anderer physikalischer Größen. Der Vorteil ist dabei, dass auf diese Weise die anderen Größen mit der Genauigkeit einer Frequenzmessung gemessen werden können. Die wichtigste und naheliegende davon ist die Zeit. Aber auch Entfernungen können mithilfe von Frequenzmessungen sehr genau gemessen werden.

### 1.2.1 Frequenzmessung und Zeitmessung

Zeitmessungen funktionieren genauso wie Frequenzmessungen: Es wird gezählt. Neben dem "Taktgeber", also etwas, das eine regelmäßige Schwingung ausführt, benötigt man für eine Uhr noch ein "Uhrwerk", das den Takt des Taktgebers zählt. Historische Pendeluhren funktionierten bereits nach diesem Prinzip: Ein Pendel führt als Taktgeber eine regelmäßige Schwingung aus, dessen Frequenz gut bekannt ist. Das mechanische Uhrwerk zählt die Pendelschläge und wandelt diese in eine Zeit um.

Bei der Entwicklung von Uhren wurden mit der Zeit immer schnellere "Pendel" verwendet, da höhere Frequenzen eine genauere Zeitmessung ermöglichen. Am Anfang des letzten Jahrhunderts wurden die ersten Quarzuhren entwickelt, deren Taktgeber ein schwingender Quarzkristall ist. Mit Frequenzen von etwa 30.000 Hz konnten Quarzuhren deutlich genauer als mechanische Uhren Zeiten messen. In der Mitte des 20. Jahrhunderts gab es einen wei-



teren Entwicklungssprung bei der Zeitmessung mit dem Bau von Mikrowellen-Atomuhren. Hier werden als Taktgeber atomare Mikrowellenschwingungen verwendet, die noch deutlich schneller schwingen. Eine Cäsium-Atomuhr "tickt" etwa 9 Milliarden Mal pro Sekunde. Da diese Mikrowellenschwingung des Cäsium-Atoms gut reproduzierbar war, wurde im Jahr 1967 die Zeiteinheit der Sekunde neu definiert:

"Die Sekunde ist das 9 192 631 770-fache der Periodendauer der dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustandes von Atomen des Nuklids Cs-133 entsprechenden Strahlung."

Cäsium-Atomuhren können heutzutage mit einer Genauigkeit von bis zu 10<sup>-15</sup> Zeit messen (Nist-1). Eine Uhr mit dieser Genauigkeit würde in 20 Mio Jahren nur um eine Sekunde falsch gehen.

Mikrowellen-Atomuhren – also Atomuhren, deren Schwingung im Mikrowellenbereich liegt - und Quarzuhren haben elektronische Uhrwerke. Dabei werden die Schwingungen in elektrische Signale umgewandelt, die elektronisch gezählt werden können. Möchte man aber noch genauere Uhren bauen, deren Taktgeber mit einer optischen Frequenz von einigen 100 THz schwingt, benötigt man eine neue Uhrwerktechnik. Das Zählen dieser schnellen Schwingungen ist mit elektronischen Uhrwerken nicht mehr möglich. Hier stößt man auf die gleichen technischen Schwierigkeiten wie beim Messen von optischen Frequenzen.

Mit der Frequenzkammtechnik als Uhrwerk ist es bereits gelungen, diese hochfrequent arbeitenden Uhren zu verwirklichen: Sogenannte optische Atomuhren4 können Zeiten mit einer Genauigkeit von 10<sup>-18</sup> messen – das ist etwa 1.000 Mal so genau wie die beste Mikrowellen-Atomuhr (Hinkley 2013).

#### 1.2.2 Frequenzmessung und Streckenmessung

Im Jahr 1983 wurde der Meter über die Lichtgeschwindigkeit neu definiert. Danach ist ein Meter:

"diejenige Strecke, die das Licht im Vakuum innerhalb des Zeitintervalls von 1/299 792 458 Sekunden durchläuft."

Da durch diese Definition die Geschwindigkeit des Lichts exakt festgelegt ist, kann eine Streckenmessung immer auf eine Laufzeitmessung von Licht zurückgeführt werden.

Technisch geht man bei solch hochgenauen Streckenmessungen so vor, dass man über eine Frequenzmessung die Wellenlänge eines Dauerstrichlasers<sup>5</sup> sehr genau bestimmt. Die Wellenlänge  $\lambda$  kann durch die gemessene Frequenz f und die Lichtgeschwindigkeit  $c_0$  bestimmt werden:

$$\lambda = \frac{c_0}{f}$$

Nun werden interferometrisch die Wellenberge auf der zu messenden Strecke gezählt und durch die Anzahl und die Wellenlänge die gesamte Streckenlänge ermittelt. Für eine große Genauigkeit verwendet man möglichst hochfrequente bzw. kurzwellige optische Strahlung, da man so eine genaue Streckeneinteilung erhält. Auch hier findet die Frequenzkammtechnik Anwendung, mit der die Frequenz der verwendeten hochfrequenten optischen Strahlung sehr genau gemessen werden kann.

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup> Optische Atomuhren werden häufig auch als optische Uhren bezeichnet.

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup> Ein Dauerstrichlaser ist ein Laser, der Licht von nur einer stabilen Frequenz erzeugt.

#### 1.2.3 Neue Messtechnik und die Weiterentwicklung der Physik

Das Herzstück von Naturwissenschaften sind Experimente, die als Grundlage für alle naturwissenschaftlichen Modelle und Theorien dienen. Je genauer man messen kann, desto tiefer kann man mit Experimenten in das "Uhrwerk" der Welt hineinsehen und diese Stück für Stück besser verstehen. In der Geschichte der Physik war eine neue und bessere Messtechnik oft die Grundlage für große Entdeckungen. So konnte Galileo Galilei mit einem Fernrohr die Jupitermonde entdecken, was schließlich zum heliozentrischen Weltbild und Newtons Gravitationstheorie geführt hat. Oder Fraunhofer hat durch die genaue Vermessung des Sonnenlichts einen Grundstein für die Atomphysik gelegt.

Mit der Frequenzkammtechnik wurde die Messtechnik in sehr vielen Bereichen revolutioniert und dadurch ein weites Feld von neuen Experimenten erschlossen. In den nächsten Jahrzehnten wird sich zeigen, welche Erkenntnisse über die Natur durch diese Technik neu gewonnen werden können oder ob die bestehenden Theorien mit einer noch besseren Genauigkeit bestätigt werden können. In jedem Fall wird man dabei viel über die Welt lernen. Bisher ist es jedenfalls gelungen, mithilfe von Frequenzkämmen die großen Theorien der Physik, die Allgemeine Relativitätstheorie und die Quantenelektrodynamik, mit beispielloser Genauigkeit zu überprüfen.

Im Jahr 2018 konnte mithilfe von optischen Atomuhren, die auf der Frequenzkammtechnik beruhen, die Allgemeine Relativitätstheorie mit einer Genauigkeit von 2,2·10<sup>-7</sup> überprüft werden. Dabei wurde die gravitative Zeitdilatation der Allgemeinen Relativitätstheorie direkt gemessen (Ashby 2018).

Um die Quantentheorie aufs Genaueste zu untersuchen, vermisst die Arbeitsgruppe von T. Hänsch, einem der Erfinder der Frequenzkammtechnik, derzeit eletronische Übergänge im Wasserstoffatom. Die Motivation dafür ist zunächst ein Test und ein tiefes Verständnis der Quantenelektrodynamik, mit der das Wasserstoffatom beschrieben wird. Mit diesen Experimenten können aber auch grundlegende Symmetrien der Natur (durch Spektroskopie des Antiwasserstoffs) oder die zeitliche Varianz von Naturkonstanten getestet werden. Eine solche Veränderung der Naturkonstanten würde das heutige physikalische Weltbild auf den Kopf stellen. In den gängigen Theorien ist eine solche Varianz nicht vorgesehen. Für diese höchst genaue Wasserstoffspektroskopie wird ebenfalls die Frequenzkammtechnik verwendet (Beyer 2017).

## 2 Klassische Frequenzmessungen

### 2.1 Zählende Zeitmessungen

Fast alle Zeitmessungen beruhen auf dem gleichen Prinzip: Man zählt die Wiederholungen eines Taktgebers, eines wohl definierten periodischen Vorgangs: Die astronomischen Zeitmessungen durch periodische Bewegung von Himmelskörpern sind prinzipiell nichts anderes als die Zeitmessung mit einer Pendeluhr, Quarzuhr oder Mikrowellen-Atomuhr. In jedem Fall wird ein periodischer Vorgang verwendet, dessen Periodendauer (T) bzw. dessen Frequenz  $(f = \frac{1}{T})$  bekannt ist. Bei der Zeitmessung wird einfach gezählt, wie oft sich dieser Vorgang wiederholt. Wenn die Anzahl an Wiederholungen mit n bezeichnet wird, dann gilt für die gemessene Zeit  $t = n \cdot T$  oder:

$$t = \frac{n}{f}$$

Dabei kann n die Anzahl der gezählten Umdrehungen der Erde sein, die Anzahl der gezähltten Schwingungen eines Uhrpendels oder die Anzahl der gezählten Mikrowellenschwingungen, die den atomaren Übergang der beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustands des Cäsiumatoms anregen.

Um noch genauere Zeitmessungen durchführen zu können, muss ein hochfrequenterer Taktgeber verwendet werden als der Übergang des Cäsium-Atoms – beispielsweise optische atomare Übergänge. Diese Frequenzen sind aber so hoch, dass sie nicht mehr elektronisch gezählt werden können und als Uhrwerke dieser optischen Atomuhren die Frequenzkammtechnik verwendet wird.

### 2.2 Zählende Frequenzmessungen

Frequenzmessungen funktionieren prinzipiell genauso wie Zeitmessungen. Es werden einfach die Wiederholungen eines periodischen Vorgangs gezählt. Nur muss hier die Gesamtzeit t gemessen werden, die für n Wiederholungen benötigt wird. Die Frequenz kann dann über die gleiche Formel berechnet werden:

$$f = \frac{n}{T}$$

Misst man die Zeit t durch einen bekannten periodischen Vorgang mit der Frequenz f', ergibt sich für die zu bestimmende Frequenz f:

$$f = \frac{n}{n'} \cdot f'$$

n und n' sind die Wiederholungen des Vorgangs der zu messenden Frequenz und der bekannten Frequenz während des gleichen Zeitintervalls.

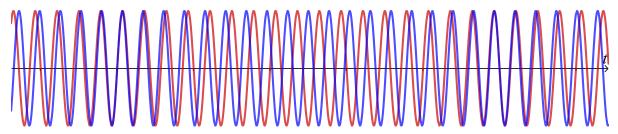


Abb. 3: Zwei Schwingungen unterschiedlicher Frequenz. Kennt man die Frequenz einer Schwingung, kann durch Zählen beider Schwingungen in einem bestimmten Intervall die Frequenz der zweiten Schwingung bestimmt werden.

#### Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Frequenz der blauen Schwingung in Abb. 3 durch Abzählen, wenn die rote Schwingung eine Frequenz von  $f_{rot}$  = 350 Hz hat.

Lösung: f<sub>blau</sub> ≈ 370 Hz

Um Frequenzen zu messen, muss man nur genau und schnell zählen können. Aber genau dies ist eine große Herausforderung bei optischen Frequenzen. Mit moderner Elektronik kann man Frequenzen bis zu einigen GHz messen. Dabei ist das Prinzip der Frequenzmessung immer das Gleiche: die Frequenzmessung durch Zählen – auch wenn die spezielle Messtechnik vom Frequenzbereich abhängt. Bei optischen Frequenzen kommt aber die elektronische Zähltechnik an ihre Grenzen. Zum Messen von Frequenzen im THz-Bereich werden optische Frequenzkämme verwendet, die auf einem ganz anderen Prinzip beruhen und in Kapitel 3 ausführlich besprochen werden.

### 2.3 Frequenzmessung mithilfe von Schwebungen

Mit einem Trick kann man Frequenzen von Schwingungen messen, die deutlich über dem Messbereich des verwendeten Messgeräts liegen. Man benötigt dazu nur eine bekannte Vergleichsschwingung, deren Frequenz möglichst ähnlich zu der zu messenden Frequenz

Vielleicht ist das Experiment aus dem Physikunterricht bekannt, bei dem zwei leicht zueinander verstimmte Stimmgabeln angeschlagen werden und man dabei einen anund abschwellenden Ton wahrnimmt. Einige Musiker stimmen auch ihre Gitarre mit mithilfe desselben Effektes: Greift man auf der ersten Saite (E) den fünften Bund, sollte man den Ton A, den Grundton der zweiten Saite erhalten. Nun verstellt man die zweite Saite so lange, bis beide Saiten den gleichen Ton

Abb. 4: Zwei zueinander verstimmte Stimmgabeln erzeugen einen an- und abschwellenden Schwebeton. Die Frequenz dieser Schwebung entspricht der Differenz der einzelnen Frequenzen. (Quelle: Leifiphysik-1)



wiedergeben. Je langsamer das An- und Abschwellen zu hören ist, desto näher liegen die beiden Töne aneinander. Auf die gleiche Weise können schließlich alle Saiten der Gitarre aufeinander abgestimmt werden.

Dieses An- und Abschwellen, das bei den verstimmten Stimmgabeln zu hören ist oder zum Stimmen der Gitarre verwendet wird, nennt sich "Schwebung". Dies ist ein Phänomen, das bei Überlagerung von zwei Schwingungen ähnlicher Frequenz entsteht. Sie treten aber nicht nur, wie in unseren Beispielen, bei akustischen Schwingungen auf, sondern bei jeder Art von Schwingung: bei mechanischen, optischen oder elektromagnetischen.

In Simulation 1 werden Schwebungen von akustischen Schwingungen veranschaulicht. Für die Simulation wurden akustische Frequenzen gewählt, da diese sowohl graphisch dargestellt als auch als akustischer Ton wiedergegeben werden können.

#### Simulation 1

#### Schwebung

Starten Sie die Simulation: https://www.geogebra.org/m/pmhmnuur

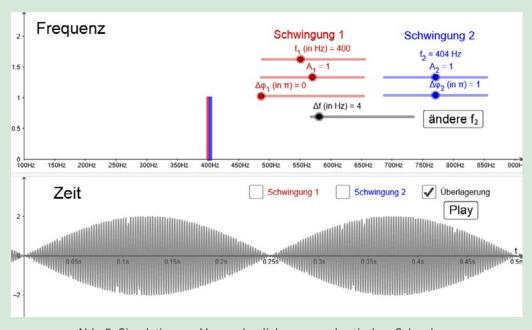


Abb. 5: Simulation zur Veranschaulichung von akustischen Schwebungen

#### Simulationsaufgaben

Probieren Sie aus:

- 1) Wie verändert sich die Schwebung, wenn sich die beiden Frequenzen, nicht aber der Frequenzunterschied  $\Delta f$  verändert?
- 2) Wie verändert sich die Schwebung, wenn sich der Frequenzunterschied  $\Delta f$  verändert?
- 3) Ermitteln Sie aus dem Diagramm die Periodendauer T der Schwebung, indem Sie die Zeit zwischen zwei Schwebungsminima bestimmen und berechnen Sie daraus die Schwebungsfrequenz  $f_{Schwebung} = \frac{1}{T}$ . Wie hängt diese mit dem Frequenzunterschied  $\Delta f$  zusammen?



- 4) Was bewirkt die Phasenverschiebung  $\Delta \varphi_1$  bzw.  $\Delta \varphi_2$  bei den einzelnen Schwingungen?
- 5) Welchen Einfluss hat die Phasenverschiebung auf die Schwebung?

Die Schwebungsfrequenz  $f_{Schwebung}$  ist die Frequenz, die das An- und Abschwellen des Signals beschreibt. In der Simulation ist zu erkennen, dass die Schwebungsfrequenz  $f_{Schwebung}$  gleich Frequenzunterschied der Schwingungen  $\Delta f = |f_1 - f_2|$  ist:

$$f_{\text{Schwebung}} = |f_1 - f_2|$$

Bestimmt man die Schwebungsfrequenz aus Abb. 5, erhält man:  $f_{Schwebung} = \frac{1}{0.25s} = 4Hz$ . Dies entspricht genau dem Frequenzunterschied  $\Delta f$ .

#### 2.3.1 Phase und Phasenverschiebung

Die Phase eines periodischen Vorgangs gibt an, in welcher Position sich dieser befindet. Bei einer harmonischen Schwingung oder Welle ist die Phase das Argument der Sinus- bzw. Kosinus-Funktion. Bei der Funktion  $\sin(\varphi)$  wird  $\varphi$  als **Phase** oder **Phasenwinkel** bezeichnet. Beschreiben wir beispielsweise eine Schwingung mit der Funktion  $s(t) = A \cdot \sin(2\pi f \cdot t)$ , so ist die Phase durch  $\varphi = 2\pi f \cdot t$  gegeben.

Wird zur Phase ein zusätzlicher Phasenwinkel  $\Delta \varphi$  addiert oder subtrahiert, wird dies als Phasenverschiebung bezeichnet. Durch eine **Phasenverschiebung** kann eine Schwingung zeitlich verschoben werden. Die Schwingung  $s'(t) = A \cdot \sin(2\pi f \cdot t - \Delta \varphi)$  ist gegenüber der Schwingung  $s(t) = A \cdot \sin(2\pi f \cdot t)$  "zeitlich nach vorne" geschoben. Sinus- bzw. Kosinus-Funktion haben eine Periode von  $2\pi$ . Dies bedeutet, dass sich die Funktion alle  $2\pi$  wiederholt. Eine Phasenverschiebung von  $\Delta \varphi = 2\pi$  führt deswegen wieder zur ursprünglichen Funktion.

Die Phasenverschiebung in Simulation 1 verschiebt jeweils die Schwingung zeitlich nach vorne.<sup>7</sup> Hierdurch wird auch das Schwebungssignal zeitlich verschoben, da sich durch das Verschieben einer Schwingung die beiden Schwingungen relativ zueinander verschieben. Die Schwebungsfrequenz bleibt davon aber unberührt.

#### 2.3.2 \*Mathematische Beschreibung von Schwebungen

Um das Phänomen der Schwebung mathematisch zu verstehen, betrachten wir, wie in Abb. 6 dargestellt, zwei harmonische Schwingungen  $s_1$  und  $s_2$ . Diese können durch die Schwingungsgleichungen

$$s_1(t) = A \cdot \sin(2\pi f_1 \cdot t)$$
 und  $s_2(t) = A \cdot \sin(2\pi f_2 \cdot t)$ 

beschrieben werden. Dabei schwingt die erste Schwingung mit der Frequenz  $f_1$  und die zweite Schwingung mit der Frequenz  $f_2$ . Beide Schwingungen haben die gleiche Amplitude A.

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup> Die Schwingung  $s'(t) = A \cdot \sin(2\pi f \cdot t - \Delta \varphi)$  hat zum Zeitpunkt t = 0 genau die Phase  $\varphi = -\Delta \varphi$ . Zum Zeitpunkt  $t = \frac{\Delta \varphi}{2\pi f}$  hat sie die Phase  $\varphi = 0$ . Die Phasenverschiebung um  $-\Delta \varphi$  bewirkt also, dass die Schwingung  $s'(t) = A \cdot \sin(2\pi f \cdot t - \Delta \varphi)$  der Schwingung  $s(t) = A \cdot \sin(2\pi f \cdot t)$  um die Zeit  $\frac{\Delta \varphi}{2\pi f}$  voraus eilt.

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup> In der Simulation ist Schwingung 1 durch  $s_1(t) = A_1 \cdot \sin(2\pi f_1 \cdot t - \Delta \varphi_1)$  und Schwingung 2 durch  $s_2(t) = A_2 \cdot \sin(2\pi f_2 \cdot t - \Delta \varphi_2)$  definiert.



Durch Addieren der beiden Schwingungen erhält man die Überlagerung der beiden Schwingungen *s(t)*:

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) = A \cdot (\sin(2\pi f_1 \cdot t) + \sin(2\pi f_2 \cdot t))$$

Aus der Trigonometrie ist bekannt, dass sich die Summe von zwei Sinus-Funktionen als Produkt von einer Sinus- und einer Kosinus-Funktion schreiben lassen kann<sup>8</sup>:

$$\sin(x) + \sin(y) = 2 \cdot \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Verwendet man diese Identität, ergibt sich für die Überlagerung der Schwingungen:

Amplitudenfaktor  $\tilde{A}(t)$ 

$$s(t) = \underbrace{2A \cdot \cos\left(2\pi \frac{f_1 - f_2}{2} \cdot t\right)}_{f_s} \cdot \sin\left(2\pi \frac{f_1 + f_2}{2} \cdot t\right)$$

Das Resultat der Überlagerung s(t) ist eine Schwingung mit der Frequenz  $f_R = \frac{f_1 + f_2}{2}$ :

$$s(t) = \tilde{A}(t) \cdot \sin(2\pi f_R \cdot t)$$

deren Amplitude mit der Einhüllenden  $\tilde{A}(t)$  der Frequenz  $f_s$  moduliert ist:

$$\tilde{A}(t) = 2A \cdot \cos(2\pi f_c \cdot t)$$

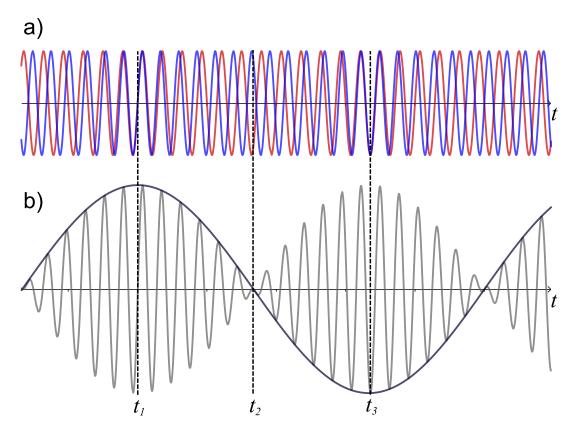


Abb. 6:

a) Zwei harmonische Schwingungen  $s_1$  und  $s_2$  unterschiedlicher Frequenz  $f_1$  und  $f_2$  (rot und blau). b) Überlagerung der Schwingungen  $s=s_1+s_2$  (grau) und Einhüllende der Schwebung (schwarz). Die Überlagerung schwingt mit der Frequenz  $f_R=\frac{f_1+f_2}{2}$ . Die Einhüllende die Frequenz  $f_S=\frac{f_1-f_2}{2}$ .



Wie in Abb. 6 zu sehen ist, wiederholen sich die maximalen Auslenkungen der Überlagerung zum Zeitpunkt  $t_1$  und zum Zeitpunkt  $t_3$ . Dies ist doppelt so schnell wie die Frequenz der Einhüllenden  $f_s = \frac{f_1 - f_2}{2}$ . Deswegen definiert man die Schwebungsfrequenz als:

$$f_{\text{Schwebung}} = |f_1 - f_2|$$

Die Schwebungsfrequenz  $f_{Schwebung}$  beschreibt die Geschwindigkeit des An- und Abschwellens, das bei unseren Beispielen mit der Stimmgabel und dem Gitarrenstimmen beschrieben wurde. Da die Schwebungsfrequenz durch die Differenz der beiden Frequenzen  $f_1$  und  $f_2$  berechnet wird, ist sie kleiner, je näher die beiden Frequenzen aneinander liegen. Genau dies ist auch beim Gitarrenstimmen oder in Simulation 1 zu beobachten.

## 2.3.3 Messung von hochfrequenten Schwingungen mithilfe von Schwebungen

Wie in Abschnitt 1.1 Frequenzkämme und Frequenzmessung angesprochen, können optische Frequenzen nicht mehr direkt gezählt werden, da Schwingungen mit einigen 100 THz für elektronische Messtechnik viel zu schnell sind. Um diese zu "zählen", nutzt man den Effekt der Schwebung: Man überlagert die zu messende Schwingung mit der Frequenz  $f_1$  mit einer bekannten Schwingung, die eine möglichst ähnliche Frequenz  $f_2$  hat. Die Schwebungsfrequenz ergibt sich, wie oben besprochen, aus der Differenz der beiden Frequenzen. Liegen die beiden optischen Frequenzen nur wenige GHz auseinander, so entsteht eine Schwebung, deren Frequenz im GHz- bzw. Mikrowellen Bereich liegt. Schwebungsfrequenzen in dieser Größenordnung können mit modernen Hochgeschwindigkeitsfotodioden aufgelöst und elektronisch gezählt werden.

Mit der gemessenen Schwebungsfrequenz  $f_{Schwebung}$  kann man nun die unbekannte Frequenz  $f_1$  berechnen:

$$f_1 = f_2 + f_{\text{Schwehung}}$$

Das Vorzeichen ist entsprechend zu wählen: ein Plus, falls die zu messende Frequenz  $f_1$  größer als die bekannte Frequenz  $f_2$  ist – ein Minus, falls sie kleiner ist.

#### 2.3.4 Harmonische Frequenzketten

Mithilfe von Schwebungen ist es möglich optische Frequenzen direkt zu messen. Die technische Herausforderung dabei ist aber, eine bekannte Frequenz  $f_2$  zu erzeugen, die nahe an der zu messenden Frequenz liegt. Bis in die 1990er Jahre hat man hierfür harmonische Frequenzketten verwendet, die experimentell sehr aufwändig waren.

In Abb. 7 ist eine harmonische Frequenzkette dargestellt, so wie sie in der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt (PTB) in Braunschweig gemeinsam mit dem Max-Planck-Institut für Quantenoptik in Garching verwirklicht wurde.

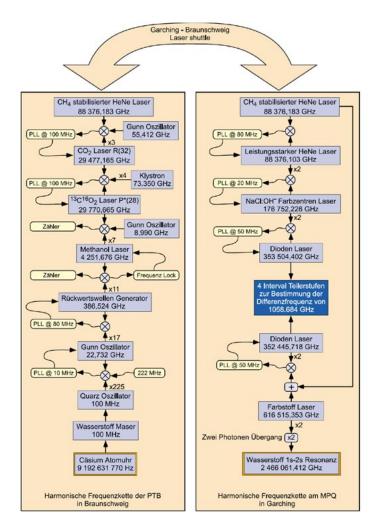


Abb. 7: Harmonische Frequenzkette, um den Wasserstoff 1s-2s Übergang zu vermessen. Diese Frequenzkette wurde 1997 vom PTB in Braunschweig und dem MPO in Garching betrieben. (Quelle: Udem 2002B).

Dabei wird ausgehend von einer auf eine Cäsium-Atomuhr synchronisierten Schwingung (links) Schritt für Schritt die Frequenz vervielfacht. Dies erreicht man, indem man in jedem Schritt eine hochfrequentere Schwingung auf die niederfrequentere phasenstabilisiert. Jeder Schritt benötigt eine andere Technik und entspricht dem experimentellen Aufwand von einer Doktorarbeit.

Auf diese Weise kann sehr genau eine bestimmte optische Frequenz erzeugt werden, um mithilfe von Schwebungen eine unbekannte Frequenz sehr genau zu vermessen.

Mit Frequenzketten war es vor der Entwicklung der Frequenzkammtechnik zwar möglich, optische Frequenzen sehr genau zu vermessen – aber mit einem extrem hohen experimentellen Aufwand. Ein weiterer großer Nachteil von Frequenzketten war, dass sie nur für ein spezielles Experiment verwendet werden konnten. Für die Messung einer anderen Frequenz war eine neue Frequenzkette nötig.

## 3 Optische Frequenzkämme

Frequenzkämme bestehen aus sehr vielen festen Referenzfrequenzen, die wie die Skala eines Lineals angeordnet sind. Jede dieser Frequenzen kann im Experiment verwendet werden, um beispielsweise mittels Schwebung eine unbekannte Frequenz genau zu vermessen. Diese Tatsache macht den Frequenzkamm zu einem vielseitig einsetzbaren Messgerät. Die Entwicklung dieser Technik war ein Meilenstein der Messtechnik.

In Abb. 8 ist ein Frequenzkamm schematisch dargestellt. Der Kamm besteht aus sehr vielen regelmäßig angeordneten "Kammzähne". Der Abstand zwischen zwei benachbarten Zähnen ist immer gleich und wird als **Wiederholungsfrequenz**  $f_r$  bezeichnet. Kennt man eine beliebige Frequenz  $f_n$  des Kamms sowie die Wiederholungsfrequenz  $f_r$ , so kann man durch Abzählen die Frequenz jedes anderen Kammzahns bestimmen.

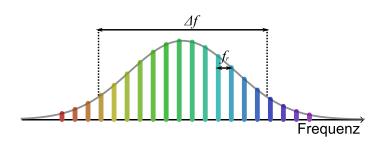


Abb. 8: Schematische Darstellung eines Frequenzkamms. Die Zähne eines Frequenzkamms haben alle exakt den gleichen Abstand, die Wiederholungsfrequenz  $f_r$ . Die Breite des Frequenzkamms wird mit  $\Delta f$  bezeichnet.

Optische Frequenzkämme können durch Femtosekundenlaser verwirklicht werden. Dies sind Laser, die Lichtpulse mit einer Pulsdauer von einigen Femtosekunden erzeugen. In diesem Abschnitt werden die grundlegenden Zusammenhänge zwischen Laserpulsen und Frequenzkämmen mithilfe verschiedener Simulationen erarbeitet und veranschaulicht.

Abschnitt 3.1 beschäftigt sich zuerst mit der Beschreibung von stehenden Wellen, die sich im Resonator des Lasers ausbilden. Diese stehenden Wellen werden üblicherweise als **Moden** bezeichnet. Danach werden Überlagerungen der Moden des Resonators betrachtet. Dabei wird der prinzipielle Zusammenhang zwischen Laserpulsen und Frequenzkämmen veranschaulicht.

In Abschnitt 3.2 wird auf die experimentellen Herausforderungen eingegangen, die bewältigt werden mussten, um Frequenzkämme als optische Frequenzmessgeräte verwenden zu können. Im Zentrum steht hierbei die Methode der Selbstreferenz, die es erlaubt, die Frequenzen eines realen Frequenzkamms sehr genau zu bestimmen.

### 3.1 Femtosekundenlaser

Die Idee der Verwendung von modengekoppelten Lasern zur Erzeugung von optischen Frequenzkämmen gab es schon in den 1970er Jahren (Eckstein 1978). Doch erst in den 1990er Jahren war es auf diese Weise experimentell möglich, optische Frequenzkämme zu erzeugen.

Dieser Abschnitt befasst sich hauptsächlich mit den Wellenphänomenen des Lasers. Die quantenmechanischen Prozesse, die für die Lichterzeugung bzw. Lichtverstärkung im Re-



sonator zuständig sind, werden hier nicht diskutiert.9 Sie sind für das Verständnis, wie Frequenzkämme und Laserpulse zusammenhängen, wenig relevant.

#### 3.1.1 Stehende Wellen im Resonator des Lasers

Der Resonator eines Lasers besteht aus zwei parallelen Spiegeln, zwischen denen Licht hinund herreflektiert wird. Durch die Überlagerung der hin- und herlaufenden Lichtwellen entstehen im Resonator stehende Wellen. Diese Wellen kann man sich ähnlich wie die Schwingung einer Gitarrensaite vorstellen. Das Entstehen der stehenden Wellen im Resonator wird in Simulation 2 veranschaulicht.

#### Simulation 2

#### Stehende Wellen

Starten Sie die Simulation: <a href="https://www.geogebra.org/m/jug9qwvm">https://www.geogebra.org/m/jug9qwvm</a>

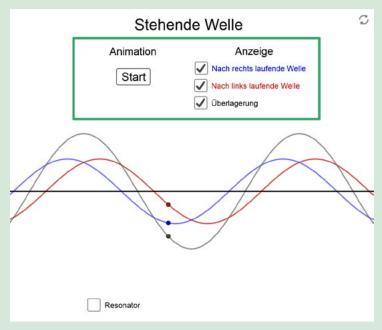


Abb. 9: Simulation zur Veranschaulichung von stehenden Wellen

#### Simulationsaufgaben

1) Machen Sie sich mit der Entstehung einer stehenden Welle vertraut: Die Überlagerung (grau) ist für jeden x-Wert immer die Summe der nach rechts laufenden Welle (blau) und der nach links laufenden Welle (rot). Hierzu sind an einer Stelle exemplarisch drei Punkte auf den drei Wellen markiert. Der y-Wert des grauen Punkts ergibt sich immer aus der Summe der y-Werte des blauen und des roten Punkts.

<sup>&</sup>lt;sup>9</sup> Einen verständlichen Einblick in die quantenmechanischen Prozesse eines Gaslasers findet man beispielsweise in dem Schulbuch (Metzler 2007) auf Seite 442.



- 2) Stehende Wellen im Resonator:
  - 1) Aktivieren Sie das Kontrollkästchen "Resonator". Nun werden stehende Wellen eines Resonators dargestellt.
    - Die gegenläufigen Wellen in rot und blau entstehen durch Reflexion an den Resonatorwänden (Spiegeln). Wird eine Welle reflektiert, vollzieht sie einen Phasensprung von  $\Delta \varphi = \pi$ . Auf diese Weise entsteht an der Resonatorwand immer ein Knoten, wie am Ende einer schwingenden Saite.
  - 2) Mit den Schiebereglern können Resonatorlänge und Mode verändert werden.

Die stehenden Wellen im Resonator erfüllen die Umlaufbedingung:

$$\lambda = \frac{2l}{n}$$

wobei *I* die Resonatorlänge und *n* eine ganze Zahl größer *0* ist. Die verschiedenen stehenden Wellen werden als Moden bezeichnet und mit der Zahl *n* durchnummeriert.

#### Aufgabe 2

#### Umlaufbedingung

a) Begründen Sie, warum nur Wellen, deren Wellenlänge  $\lambda$  die Umlaufbedingung

$$\lambda = \frac{2l}{n}$$

erfüllt, im Resonator eine stehende Welle ausbilden kann.

b) Zwischen Wellenlänge  $\lambda$  und Frequenz f und Lichtgeschwindigkeit c besteht der Zusammenhang:  $\lambda = \frac{c}{f}$  Zeigen Sie, dass die Umlaufbedingung auch als

$$f = \frac{nc}{2l}$$

dargestellt werden kann.

#### 3.1.2 \*Mathematische Beschreibung von stehenden Wellen

Um stehende Wellen mathematisch zu betrachten, geht man ähnlich wie bei der Beschreibung von Schwebungen im Abschnitt 2.3.1 vor: Man überlagert zwei Wellen, indem man ihre Funktionsterme addiert.

Der prinzipielle Unterschied zur Schwebung ist, dass hier Wellen und keine Schwingungen betrachtet werden. Eine Schwingung wird durch eine Funktion, die nur von der Zeit abhängt, beschrieben. Der Ort ist dabei fest oder nicht relevant. Eine Welle ist im Gegensatz dazu eine sich im Raum ausbreitende Schwingung und wird durch eine Funktion, die sowohl von der Zeit als auch vom Ort abhängt, beschrieben.



Das Trommelfell beispielsweise führt im Ohr eine Schwingung aus und lässt uns auf diese Weise Töne wahrnehmen. Die Töne selbst gelangen durch Schallwellen, die sich in der Luft ausbreiten, vom Musikinstrument zum Trommelfell. Ein anderes Beispiel ist ein schwingendes Atom, das eine Lichtwelle aussendet oder von dieser zum Schwingen angeregt wird.

An dieser Stelle betrachten wir, ähnlich wie im Abschnitt der Schwebungen, harmonische Wellen. Dies sind Wellen, die durch eine Sinus- oder Kosinus-Funktion dargestellt werden. Eine harmonische Welle mit Amplitude A, die sich in x-Richtung ausbreitet, kann durch die folgende Funktionsgleichung beschrieben werden:

$$w(x,t) = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot x - 2\pi f \cdot t\right)$$

Hierbei ist f die Frequenz, wie wir sie von einer Schwingung kennen;  $\lambda$  die Wellenlänge, also der räumliche Abstand zwischen zwei Wellenbergen. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $\nu$  der Welle ist durch die Frequenz und die Wellenlänge bestimmt:

$$v = \lambda \cdot f$$

Im Resonator des Lasers überlagern sich immer zwei gegenläufige Wellen, die die gleiche Frequenz f, die gleiche Wellenlänge  $\lambda$  und die gleiche Amplitude A haben.

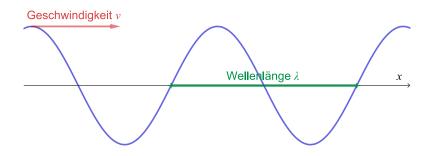


Abb. 10: Eine Welle ist eine sich im Raum ausbreitende Schwingung. Diese bewegt sich mit der Geschwindigkeit v durch den Raum. Die Wellenlänge  $\lambda$  gibt den Abstand zwischen zwei benachbarten Wellenbergen oder Wellentälern an. An einem festen Ort schwingt die Welle mit der Frequenz f.

Die nach rechts laufende Welle kann durch die Funktion:

$$w_r(x,t) = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot x - 2\pi f \cdot t\right)$$

dargestellt werden, und die nach links laufende Welle durch die Funktion:

$$w_{l}(x,t) = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot x + 2\pi f \cdot t\right)$$

Die stehende Welle  $w_s$  ergibt sich nun aus der Überlagerung der beiden Wellen. Hierzu addiert man die Funktionen  $w_r$  und  $w_i$ :

$$w_s(x,t) = w_r(x,t) + w_l(x,t) = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot x - 2\pi f \cdot t\right) + A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot x + 2\pi f \cdot t\right)$$



Der letzte Ausdruck kann, ähnlich wie bei einer Schwebung, durch eine trigonometrische Beziehung<sup>10</sup>:

$$\sin(x + y) + \sin(x - y) = 2\sin(x)\cos(y)$$

umgeformt werden und man erhält für die Überlagerung:

Amplitudenfaktor Schwingung
$$w_s(x,t) = \frac{2A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot x\right)}{2A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot x\right)} \cdot \cos\left(2\pi f \cdot t\right)$$

Das Ergebnis ist kann in zwei Teile zerlegt werden:

$$w_{s}(x,t) = A(x) \cdot s(t)$$

Der zweite Teil,  $s(t) = \cos(2\pi f \cdot t)$ , ist eine gewöhnliche harmonische Schwingung mit der Frequenz f. Der erste Teil,  $A(x) = 2A \cdot \sin(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot x)$ , ist ein ortsabhängiger Amplitudenfaktor. Dieser gibt an, wie groß die maximale Auslenkung der Schwingung an jedem Ort ist. Somit schwingt bei der stehenden Welle jeder Ort mit der gleichen Frequenz. Nur die Amplitude dieser Schwingung ist vom Ort abhängig. An den Orten, an denen der Amplitudenfaktor null wird, schwingt die stehende Welle nicht. Diese werden als Knotenpunkte bezeichnet. In Simulation 2 ist dies anschaulich zu beobachten.

#### Aufgabe 3

a) Zeigen Sie, dass die hier verwendete trigonometrische Beziehung:

$$\sin(x + y) + \sin(x - y) = 2\sin(x)\cos(y)$$

aus den Additionstheoremen der Sinusfunktion<sup>11</sup>:

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(y)\sin(x)$$

hergeleitet werden kann.

b) Zeigen Sie weiter, dass die im Abschnitt 2.3.1 verwendete trigonometrische Beziehung:

$$\sin(x) + \sin(y) = 2 \cdot \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

mit der in Teilaufgabe a) hergeleiteten Beziehung identisch ist.

Tipp: Führen Sie eine passende Variablensubstitution durch.

<sup>&</sup>lt;sup>10</sup> zur Herleitung dieser Beziehung s. Aufgabe 3

<sup>&</sup>lt;sup>11</sup> (Bronstein 2005) S. 80 oder (Wikipedia-2)

#### 3.1.3 Dauerstrich-Laser und gepulste Laser

Damit sich überhaupt stehende Wellen im Resonator ausbilden können, muss das Lasermedium Licht in der Wellenlänge einer Mode des Resonators erzeugen und verstärken. Bei Dauerstrich-Lasern wird meist durch einen atomaren Übergang Licht einer sehr schmalen spektralen Bandbreite erzeugt. Nur die Moden, die im Frequenzbereich des Übergangs liegen, können angeregt werden. Dauerstrich-Laser bilden deswegen nur sehr wenige Moden, oft sogar nur eine einzige Mode, aus.

Laser mit breitbrandigen Lasermedien können Licht einer deutlich größeren Bandbreite erzeugen und verstärken. Abhängig von der spektralen Bandbreite des Lasermediums und der Resonatorlänge können einige tausend Moden gleichzeitig angeregt werden.

#### Aufgabe 4

#### Modenanzahl eines Helium-Neon-Lasers und eines Titan-Saphir-Lasers im Vergleich

a) Ein HeNe-Laser erzeugt Licht der Wellenlänge 632,816 nm. Die Bandbreite des Lichts beträgt etwa 0,002 nm, der Resonator ist 20 cm lang.

Bestimmen Sie, welche Mode im Resonator von der zentralen Wellenlänge angeregt wird und wie viele Moden bei der gegebenen Bandbreite angeregt werden.

b) Ein Titan-Saphir-Laser erzeugt Licht von etwa 670 nm bis etwa 1070 nm. Ermitteln Sie die Anzahl der angeregten Moden, wenn die Resonatorlänge ebenfalls 20 cm beträgt.

Lösung: a) n = 632.095 - 2 Moden werden angeregt. b) 223.182 Moden werden angeregt.

#### 3.1.4 Entstehung von Laserpulsen

Wenn viele Moden innerhalb des Resonators gleichzeitig schwingen, überlagern sich die stehenden Wellen der einzelnen Moden zu einer sehr komplexen "stehenden Welle". Unter bestimmten Bedingungen entstehen dabei Pulse, die zwischen den Spiegeln hin- und herlaufen. In Simulation 3 können die Vorgänge im Resonator, insbesondere das Entstehen der Pulse, anschaulich nachvollzogen werden.

#### Simulation 3

#### Modengekoppelter Resonator

Starten Sie die Simulation: https://www.geogebra.org/m/xesgynse

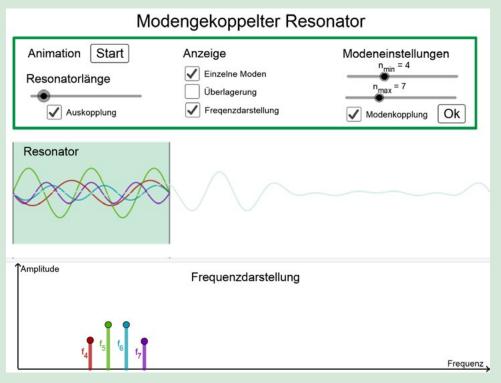


Abb. 11: Simulation zur Veranschaulichung der Entstehung von Laserpulsen

#### Simulationsaufgaben

- 1. Betrachten Sie die **einzelnen Moden** sowie ihre **Überlagerung**.
- Versuchen Sie die Entstehung des im Resonator hin- und herlaufenden Pulses nachzuvollziehen. Variieren Sie auch die aktiven Moden. Hierzu verändern Sie n\_min und n\_max und klicken dann auf Ok.
- 2. Beobachten Sie, welchen Einfluss die **Modenkopplung** auf die einzelnen Moden sowie auf die Überlagerung der Moden hat. Schalten Sie hierzu die Modenkopplung aus und klicken Sie dann auf Ok.

Aktivieren Sie für die nächsten Aufgaben wieder die Modenkopplung und klicken Sie dann auf Ok.



- 3. Schalten Sie die Auskopplung der Lichtwellen aus dem Resonator ein. Beobachten Sie, wie ein Teil der nach rechts laufenden Lichtwellen den Resonator verlässt. Bei einem echten Laser werden die Lichtwellen im Resonator durch einen Spiegel mit einer sehr geringen Transmission (Durchlässigkeit) ausgekoppelt, sodass ein sehr geringer Teil des Lichts den Resonator als "Laserstrahl" verlässt.
- 4. Wenn man die Resonatorlänge verändert, wird die Schwingung im Resonator schneller (kleiner Resonator) bzw. langsamer (großer Resonator). Was verändert sich dabei: die Geschwindigkeit der Wellen oder ihre Frequenz?
- 5. Aktivieren Sie die Frequenzdarstellung und überprüfen Sie Ihre Antwort auf die letzte Frage. Jede Welle im Resonator ist hier durch eine Linie der gleichen Farbe dargestellt. Die Linien sind nach rechts entsprechend der Frequenz der Welle eingezeichnet, die Länge der Linie entspricht der Amplitude der Welle.
- 6. Die **Pulswiederholungsfrequenz** f, ist die Frequenz, mit der sich der ausgekoppelte Puls wiederholt. Bezeichnen wir den zeitlichen Abstand zwischen zwei Pulsen mit τ, dann ist die Pulswiederholungsfrequenz durch  $f_r = \frac{1}{\tau}$  gegeben.

Probieren Sie aus: Wie wirkt sich die Resonatorlänge auf f, aus? Wie wirkt sich die Modenauswahl ( $n_{min}$  und  $n_{max}$ ) auf  $f_r$  aus?

Vermuten Sie: Wo könnte f, in der Frequenzdarstellung zu finden sein?

7. Verändern Sie die Amplituden der einzelnen Moden, indem Sie die Höhe der Linien in der Frequenzdarstellung verschieben. Versuchen Sie dabei einen möglichst klaren, rauscharmen Puls zu erzeugen, sodass die Schwingungen zwischen den Pulsen möglichst verschwinden. Verwenden Sie dazu möglichst viele Moden. Wie sieht ein klarer Puls in der Frequenzdarstellung aus?

Die Antworten auf die Simulationsaufgaben werden im nächsten Textabschnitt besprochen.

Es ist auf den ersten Blick verwunderlich, dass aus der Überlagerung von vielen stehenden Wellen im Resonator einzelne Pulse entstehen können. Wenn die Amplituden der einzelnen Wellen passend gewählt werden, ist es sogar möglich, dass die Schwingungen zwischen den Pulsen sich gegenseitig ganz auslöschen und klare eindeutige Pulse hintereinander entstehen.

### Modenkopplung

Ein Puls entsteht aber nur, wenn die einzelnen Schwingungsmoden eine feste Phasenbeziehung untereinander haben. Dies bezeichnet man als Modenkopplung. Das bedeutet, dass zu einem bestimmten Zeitpunkt alle Moden "im Gleichschritt" schwingen, bevor sie wieder mit unterschiedlichen Frequenzen auseinander laufen. Dieser "Gleichschritt" wiederholt sich immer nach der Zeit  $\tau$ , dem zeitlichen Abstand zwischen zwei Pulsen.

Mathematisch bedeutet die Modenkopplung, dass zu einem bestimmten Zeitpunkt alle Moden die gleiche Phase haben. Die Schwingungen<sup>12</sup> der Moden im Resonator können durch

<sup>&</sup>lt;sup>12</sup> Hierbei wird nur der Schwingungsteil der stehenden Welle betrachtet. Der Amplitudenfaktor, der die räumliche Form der stehenden Welle beschreibt, wird durch eine Phasenverschiebung nicht beeinträchtigt und wird an dieser Stelle nicht betrachtet.



die Funktion

$$s_n(t) = A_n \cdot \cos(2\pi f_n \cdot t - \Delta \varphi_0)$$

beschrieben werden. Dabei gibt  $\Delta \varphi_0$  die Phasenverschiebung an und der Index n bezeichnet die einzelnen Moden. Sind die Moden gekoppelt, so haben alle Moden die gleiche Phasenverschiebung von  $\Delta \varphi_0$ . Zum Zeitpunkt t=0 ist genau  $-\Delta \varphi_0$  die Phase jeder einzelnen Mode. Dies wurde weiter oben als "Gleichschritt" bezeichnet.

Liegt hingegen keine Modenkopplung vor und schwingen alle Moden unabhängig voneinander, hat jede Mode eine zufällige, andere Phasenverschiebung. Dies führt zu einer chaotisch aussehenden Gesamtschwingung.

#### Zeitlicher Pulsabstand $\tau$ und Wiederholungsfrequenz $f_{\tau}$

In der Zeit  $\tau$  schwingt die erste Mode genau einmal, die zweite Mode genau zweimal, die dritte Mode genau dreimal, und die n-te Mode genau n-mal. Deswegen treffen sich nach der Zeit  $\tau$  alle Moden wieder in ihrer ursprünglichen Position und so wiederholt sich das Überlagerungssignal immer nach der Zeit  $\tau$ .

Die Wiederholungsfrequenz (oder Repetitionsfrequenz) ist die Frequenz, mit der sich der Puls wiederholt und ist durch  $f_r = \frac{1}{\tau}$  definiert.

Schwingen alle Moden unabhängig voneinander, wiederholt sich das Überlagerungssignal zwar immer noch in der Zeit  $\tau$ , aber die Pulsform verschwindet und es entsteht ein periodisches, aber chaotisches Überlagerungssignal.

#### Resonatorlänge und Pulswiederholungsfrequenz

Die Zeit  $\tau$  zwischen zwei Pulsen hängt mit der Resonatorlänge zusammen. Jedes Mal, wenn der Puls im Resonator hin- und hergelaufen ist, wird ein Anteil dieses Pulses ausgekoppelt. Dabei entstehen die einzelnen Pulse des Lasers. Je kleiner der Resonator ist, desto weniger Zeit benötigt der Puls für diese Strecke, da die absolute Geschwindigkeit des Pulses unabhängig von der Resonatorlänge ist.

#### Pulswiederholungsfrequenz und Modenabstand

Betrachten wir die Pulswiederholungsfrequenz  $f_r$  ganz genau, können wir sehen, dass zwei benachbarte Moden genau den Abstand  $f_r$  aufweisen: Während der Zeit  $\tau$  schwingt die erste Mode genau einmal, also ist  $f_1 = \frac{1}{\tau} = f_r$ . Die zweite Mode schwingt in der Zeit  $\tau$  genau zweimal, also  $f_2 = \frac{2}{\tau} = 2 \cdot f_r$ . Somit ist der Abstand zwischen diesen beiden Moden  $f_2 - f_1 = 2 \cdot f_r - f_r = f_r$ . Dies gilt für alle aufeinanderfolgenden Moden.

#### Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass für alle benachbarten Moden n und m der Modenabstand die Wiederholungsfrequenz ist, also:

$$f_m - f_n = f_r$$



Da alle Moden eines Laserpulses den gleichen Abstand, nämlich die Repetitionsfreguenz f., haben, entsteht eine Art "Kamm", wenn der Laserpuls im "Frequenzraum" dargestellt wird. Jede Mode wird durch einen "Kammzahn" dargestellt, der zu den benachbarten "Kammzähnen" genau den Abstand  $f_r$  hat. In Abb. 8 ist ein solcher Kamm schematisch dargestellt.

#### 3.1.5 Reale Resonatoren

Im letzten Abschnitt wurde das Prinzip der Pulsentstehung im Resonator des Lasers veranschaulicht. Dabei wurden gegenüber realen Resonatoren verschiedene Effekte vernachlässigt. An dieser Stelle werden die wichtigsten Unterschiede zu realen Resonatoren besprochen.

#### Dispersion

Dispersion bedeutet, dass sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle innerhalb eines Mediums abhängig von der Frequenz verändert. Genauer ausgedrückt verändert die Dispersion den Zusammenhang zwischen Frequenz und Wellenlänge. Dieser ist normalerweise im Vakuum durch  $f = \frac{c_0}{\lambda}$  gegeben, wobei  $c_0$  die Lichtgeschwindigkeit ist. In einem Medium ist dieser feste Zusammenhang im Allgemeinen nicht mehr gegeben. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Licht in einem Medium ist von der Frequenz des Lichts abhängig.

Aus dem Alltag oder dem Physikunterricht ist das Phänomen der Dispersion gut bekannt, das sich beispielsweise bei der Brechung von Licht<sup>13</sup> zeigt, wenn bei einem Glasprisma die Lichtstrahlen verschiedener Frequenzen unterschiedlich aufgespalten werden.

#### Kerr-Effekt

Bei sehr hohen Lichtintensitäten kann die Ausbreitungsgeschwindigkeit im Medium neben der Frequenz auch noch von der Intensität des Lichts abhängen. Wenn starke elektromagnetische Felder der Welle die Elektronenwolken der Atome im Festkörper verzerren, kann dies ebenfalls die Ausbreitungsgeschwindigkeit verändern. Dieser sogenannte Kerr-Effekt findet auch im Resonator eines Festkörperlasers durch das Lasermedium statt. Dies führt zusammen mit der Dispersion zu Phasenverschiebungen, die Einfluss auf den Frequenzkamm und die Pulsfolge haben.

#### Modenkopplung durch den Kerr-Effekt

Bei kontinuierlichen Lasern schwingen die einzelnen Moden im Resonator unabhängig voneinander. Hierdurch entsteht ein kontinuierlicher Laserstrahl. Wie in Aufgabe 2 der Simulation 3 zu sehen ist, ist für die Pulserzeugung eine Modenkopplung nötig.

In Titan-Saphir-Lasern kann durch den Kerr-Effekt eine Modenkopplung erzeugt werden. Der Kerr-Effekt in einem Titan-Saphir-Kristall des Resonators führt dazu, dass die Moden eines sehr starken Pulses "zusammengehalten" werden. Würde eine Mode dieses Pulses "davonlaufen", so würde die Ausbreitungsgeschwindigkeit dieser Mode so "gebremst" werden, dass sie wieder zum Puls "zurückläuft". Hierdurch werden alle Moden am Puls "zusammengehalten". Dies führt zu einer Modenkopplung und zur Entstehung der Laserpulse. Solche Pulse werden als Solitonen bezeichnet.

<sup>&</sup>lt;sup>13</sup> Der Brechungsindex hängt mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit von Licht zusammen. Das Phänomen der Brechung kann auch durch eine vom Medium abhängige Ausbreitungsgeschwindigkeit und der Annahme, dass Licht immer den zeitlich kürzesten Weg nimmt, erklärt werden.



#### Einhüllende – die Amplitudenverteilung der Moden

In einem realen Resonator haben verschiedene Moden unterschiedliche Amplituden, da das Licht im Resonator abhängig von seiner Frequenz verstärkt wird. Meist kann die **Einhüllende**, das ist die Amplitudenverteilung der Moden im Frequenzraum, durch eine Gaußsche Normalverteilung angenähert werden.

Wie wir in der Simulationsaufgabe 7 der Simulation 3 gesehen haben, entsteht ein möglichst klarer Pulszug ohne Rauschen zwischen den Pulsen, wenn die Moden der mittleren Frequenzen stärker ausgeprägt sind als die im Randbereich. Es kann mathematisch gezeigt werden, dass dies durch eine Einhüllende in der Form einer Gaußschen Normalverteilung der Fall ist.

#### 3.1.6 Verwendung realer Laserpulse als Frequenzkamm

Im letzten Abschnitt wurden unterschiedliche Effekte erläutert, die dazu führen, dass reale Laser keine idealen Resonatoren wie in Simulation 3 sind. Dadurch stellte sich lange Zeit die Frage, ob die durch Laserpulse erzeugten Frequenzkämme überhaupt zur Messung von optischen Frequenzen verwendet werden können. Für die experimentelle Verwirklichung der Frequenzkammtechnik mussten verschiedene Herausforderungen bewältigt werden:

• Die größte Herausforderung bei der Nutzung realer Laserpulse als Frequenzkämme war, die Frequenz der einzelnen Moden genau zu bestimmen. Im realen Resonator entsteht (u. a. durch Dispersion und Kerr-Effekt des Resonatormediums) eine Frequenzveränderung der Moden. Diese werden dabei um eine **Offsetfrequenz**  $f_0$  verschoben:

$$f_n = n \cdot f_r + f_0$$

Um die Frequenzen der Moden  $f_n$  eines realen Lasers zu bestimmen, wird sowohl die Wiederholungsfrequenz  $f_r$  als auch die Offsetfrequenz  $f_0$  benötigt. Hierbei hat sich die Bestimmung letzterer lange Zeit als große Schwierigkeit erwiesen. Die Frequenzen der Moden können aber, ohne die Offsetfrequenz zu kennen, nicht ermittelt werden. Somit wäre der Frequenzkamm unbrauchbar. Mit dem Trick der **Selbstreferenz** gelang es den Arbeitsgruppen von T. Hänsch und von J. Hall Ende der 1990er Jahre dieses Problem zu lösen. Mit dieser Methode gelang es ihnen, die Frequenzen von Frequenzkämmen so genau zu bestimmen, dass Präzisionsmessungen optischer Frequenzen möglich wurden (Udem 2002A Hall 2001).

• Eine weitere große Frage war, ob die Repetitionsfrequenz  $f_r$  bei einem realen Laserpuls genauso konstant ist, wie es die Theorie vorhersagt, und ob deswegen mit Laserpulsen ausreichend genaue Frequenzkämme erzeugt werden können.

In den nächsten Abschnitten werden die Lösungen dieser Herausforderungen ausführlich besprochen.

### 3.2 Frequenzkämme und Laserpulse

Um optische Frequenzkämme zur genauen Messung von optischen Frequenzen zu verwenden, müssen die Frequenzen der Zähne des Kamms sehr genau bekannt sein. Wie im letzten



Abschnitt besprochen wurde, ist es möglich, einen gepulsten Laser als Frequenzkammgenerator zu verwenden. Bei realen Lasern sind die Prozesse im Resonator aber komplizierter, sodass nicht ohne weiteres von der Resonatorlänge auf die Frequenzen der einzelnen Kammzähne geschlossen werden kann, wie man nach Simulation 3 annehmen könnte.

Es können aber die Pulszüge des erzeugten Laserstrahls vermessen werden und aus der Form der einzelnen Pulse und des Pulsabstands kann auf die Kammstruktur zurückgeschlossen werden.

In diesem Abschnitt wird die Wechselbeziehung zwischen der Form eines Frequenzkamms und des daraus resultierenden Pulszuges behandelt. Mathematisch wird diese Beziehung in der Literatur mit Fourier-Transformationen bzw. Fourier-Reihen beschrieben. Aus dieser mathematischen Beschreibung können wichtige Zusammenhänge hergeleitet werden, die Grundlage für das Verständnis von Frequenzkämmen und der experimentellen Umsetzung ist.

An dieser Stelle möchten wir aber nicht tief in die Mathematik einsteigen und Fourier-Reihen behandeln. Wir versuchen anhand anschaulicher Simulationen ein Verständnis für diese Zusammenhänge zu entwickeln.

Zentrale Rolle in diesem Abschnitt spielt Simulation 4, die die Wechselbeziehung zwischen Frequenzkamm und Pulszug veranschaulicht. Alle Simulationsaufgaben der folgenden Abschnitte beziehen sich auf diese Simulation.

#### Simulation 4

#### Frequenzkamm

Starten Sie für die Simulationsaufgaben die Simulation: https://www.geogebra.org/m/uefwxwak

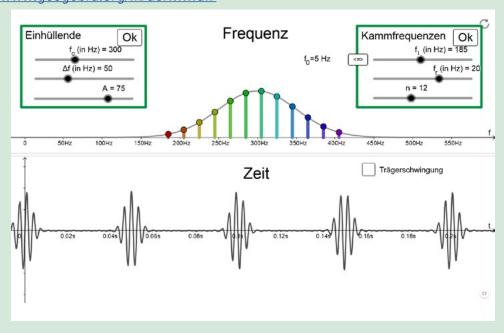


Abb. 12: Simulation zur Veranschaulichung des Zusammenhangs zwischen der Form des Frequenzkamms und der Pulsfolge

#### 3.2.1 Pulsdauer und Pulswiederholungsrate

Für einen klaren, rauscharmen Pulszug ist die Amplitudenverteilung der Moden im Frequenzraum durch eine Gaußsche Normalverteilung gegeben. Die Kammzähne haben jeweils einen Frequenzabstand von  $f_r$ . Um den Zusammenhang zwischen diesen Größen und der Form des Pulszuges zu verstehen, führen Sie die folgenden Aufgaben durch:

#### Simulation 4

#### Simulationsaufgaben

- 1. Verändern Sie die Form der **Einhüllenden**. Die Ergebnisse sind am besten zu sehen, wenn die Einhüllende von den Kammzähne möglichst mittig und vollständig ausgefüllt wird. Dazu stellt man die Kammfrequenzen auf der rechten Seite entsprechend ein.
  - a) Wie verändert die Amplitude A der Einhüllenden den Puls?
  - b) Welchen Einfluss hat die Breite des Kamms im Frequenzraum  $\Delta f$  auf die Form eines Pulses?
  - c) Welche Auswirkung hat die zentrale Frequenz  $f_c$  auf einen Puls?
- 2. Verändern Sie die **Repetitionsfrequenz**  $f_r$  und lesen Sie die **Zeit zwischen zwei Pulsen**  $\tau$  aus dem unteren Diagramm ab. Stimmt dies mit dem theoretischen Zusammenhang  $f_r = \frac{1}{\tau}$  überein?

In der Simulation ist zu erkennen, dass eine Breite des Kamms  $\Delta f$  mit der Pulsdauer zusammenhängt: Je breiter der Kamm, desto kürzer ist der Puls. Es kann mathematisch gezeigt werden, dass sich die Pulsdauer T durch  $T = \frac{1}{df}$  ausdrücken lässt.

Wie in den vorigen Abschnitten bereits beschrieben und in der Simulation zu erkennen ist, besteht zwischen Pulswiederholungsrate  $f_r$  und Pulsabstand  $\tau$  der Zusammenhang  $f_r = \frac{1}{\tau}$ .

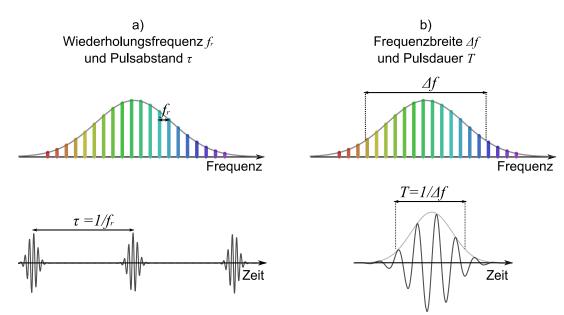


Abb. 13: Zusammenhang der Größen des Frequenzkamms mit den Größen des Pulszuges. a) Der Abstand der Zähne des Kamms entspricht der Wiederholungsfrequenz  $f_r$ . Ein geringer Zahnabstand führt zu einem großen Pulsabstand, ein großer Zahnabstand zu einem kleinen Pulsabstand. b) Die Breite des Kamms  $\Delta f$  hängt mit der Pulsdauer T zusammen: Ein breiter Kamm führt zu einer kurzen Pulsdauer, ein schmaler Kamm zu einer langen Pulsdauer.

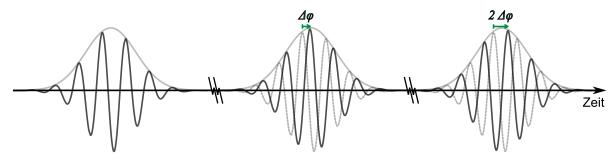


Diese beiden Zusammenhänge sind in Abb. 13 dargestellt:

Interessant ist an dieser Stelle die Betrachtung des folgenden Grenzwerts: Wenn wir die Wiederholungsfrequenz  $f_r$  immer kleiner werden lassen (und dabei n, die Anzahl der Moden, entsprechend erhöhen), so wird der Pulsabstand immer größer. Bildet man hiervon den Grenzwert  $f_r \rightarrow 0$ , so erhält man in der Frequenzdarstellung ein Gauß-verteiltes kontinuierliches Spektrum (mit der Breite  $\Delta f$ ) und in der Zeitdarstellung einen einzelnen Puls (mit der Pulsdauer  $T = \frac{1}{\Delta f}$ ). Folglich kann ein einzelner Puls durch ein Gauß-förmiges kontinuierliches Spektrum beschrieben werden.

#### 3.2.2 Phasenverschiebung und Offsetfrequenz

Durch Dispersion und Kerr-Effekt findet im Resonator eine Phasenverschiebung der einzelnen Moden statt. <sup>14</sup> Daraus resultiert eine Phasenverschiebung  $\Delta \varphi$  der Pulsschwingung zwi-



schen zwei aufeinanderfolgenden Pulsen, wie es in Abb. 14 dargestellt ist:

Abb. 14: Bei realen Laserpulszügen sehen die einzelnen Pulse im Allgemeinen nicht identisch aus. Hier

wandert von Puls zu Puls die Schwingung innerhalb der Einhüllenden. Hierbei verschiebt sich die Phase zwischen zwei aufeinanderfolgenden Pulsen um die Phasenverschiebung  $\Delta \varphi$ .

Diese Phasenverschiebung  $\Delta \varphi$  hat Einfluss auf die Kammfrequenzen und bewirkt eine Verschiebung der Kammfrequenzen um eine Offsetfrequenz $f_0$ :

$$f_n = n \cdot f_r + f_0.$$

Zur Bestimmung von  $f_n$  wird neben  $f_r$ , das über den Pulsabstand sehr genau ermittelt werden kann, auch die Offsetfrequenz  $f_0$  benötigt, die mit der Phasenverschiebung  $\Delta \varphi$  zusammenhängt.

In den folgenden Simulationsaufgaben wird der genaue Zusammenhang zwischen Offsetfrequenz  $f_0$  und Phasenverschiebung  $\Delta \varphi$  erarbeitet und veranschaulicht:

<sup>&</sup>lt;sup>14</sup> Eine willkürliche Phasenverschiebung der Moden würde dazu führen, dass die Pulse vollständig verschwinden, so wie es in Simulation 3 Aufgabe 2 veranschaulicht wird. Die Phasenverschiebung im Resonator eines gepulsten Lasers ist aber systematisch (aufgrund des Kerr-Effekts), so dass sie nur zu einer Phasenverschiebung  $\Delta \varphi$  des Pulses gegenüber der Trägerschwingung führt

#### Simulation 4

#### Simulationsaufgaben

3. Die Form von zwei aufeinanderfolgenden Pulsen ist meistens etwas unterschiedlich. Die Pulse haben zwar die gleiche Dauer, aber die Schwingungen der Pulse sehen unterschiedlich aus.

Verändern Sie entweder  $f_i$ , die niedrigste Frequenz des Frequenzkamms, oder  $f_0$ , die Offsetfrequenz, und probieren Sie aus:

- a. Für welche Frequenzen  $f_i$  oder  $f_0$  sehen alle Pulse identisch aus?
- b. Für welche Frequenzen  $f_i$  oder  $f_o$  sehen aufeinanderfolgende Pulse genau spiegelverkehrt aus?
- c. Stellen Sie  $f_r$  auf 12 Hz ein. Wie muss die Frequenz  $f_o$  gewählt werden, damit jeder dritte Puls gleich aussieht? Wie muss sie gewählt werden, damit jeder vierte Puls identisch ist?
  - Um die Pulse besser vergleichen zu können, ist es hilfreich die Ansicht der Trägerschwingung zu aktivieren.
- d. Wie müssen  $f_r$  und  $f_0$  allgemein gewählt werden, damit jeder m-te Puls identisch aussieht?

Die Ergebnisse dieser Simulationsaufgaben können wie folgt zusammengefasst werden:

- Ist die Offsetfrequenz  $f_0$  = 0, dann sehen zwei aufeinanderfolgende Pulse identisch aus. Hier besteht keine Phasenverschiebung, also ist  $\Delta \varphi$  = 0.
- Ist die Offsetfrequenz  $f_0 \neq 0$ , so findet eine Phasenverschiebung  $\Delta \varphi \neq 0$  statt. Die Schwingungen von zwei aufeinanderfolgenden Pulsen sind um  $\Delta \varphi$  phasenverschoben.
- Ist die Offsetfrequenz  $f_0$  genau  $\frac{1}{m}$  -tel der Wiederholungsfrequenz  $f_r$ , also  $f_0 = \frac{f_r}{m}$ , so hat der Puls nach m Wiederholungen wieder die gleiche Phase.

#### Aufgabe 6

Zeigen Sie anhand dieser Ergebnisse, dass die Phasenverschiebung von Puls zu Puls die Bedingung:  $\Delta \varphi = 2\pi \cdot \frac{f_0}{f}$  erfüllt.

Lösung: Wenn der Puls nach m Wiederholungen wieder die ursprüngliche Phase hat, so muss in diesem Fall die gesamte Phasenverschiebung  $m \cdot \Delta \varphi$  genau eine Periode, also  $2\pi$  entsprechen<sup>15</sup>. Somit gilt:  $m \cdot \Delta \varphi = 2\pi$ . Da m angibt, wie oft  $f_0$  in  $f_r$  passt, gilt:  $m = \frac{f_r}{f_0}$ . Setzt man die zweite Gleichung in die erste Gleichung ein und löst nach der Phasenverschiebung auf, erhält man die obige Gleichung.

<sup>&</sup>lt;sup>15</sup> Dies gilt solange  $f_0$  ein ganzzahliger Teiler von  $f_r$  ist. Ist  $f_0 = \frac{k}{m} \cdot f_r$ , so ist der Puls ebenfalls nach m Wiederholungen wieder identisch. Hierbei beträgt die gesamte Phasenverschiebung  $m \cdot \Delta \varphi = k \cdot 2\pi$ . Somit ist in diesem Fall die Phasenverschiebung zwischen zwei Pulsen  $\Delta \varphi = \frac{k}{m} \cdot 2\pi$ . Mit dem Zusammenhang zwischen  $f_0$  und  $f_r$  ergibt sich ebenfalls:  $\Delta \varphi = \frac{f_0}{f} \cdot 2\pi$ .

Die im Resonator entstandene Phasenverschiebung  $\Delta \varphi$  führt zu einer Verschiebung der Zähne des Frequenzkamms um die Offsetfrequenz  $f_0$ . Der Zusammenhang zwischen diesen beiden Größen ist durch folgende Gleichung gegeben:

$$\Delta \varphi = 2\pi \cdot \frac{f_0}{f_c} .$$

Um die Kammfrequenzen zu ermitteln, muss wegen  $f_n = n \cdot f_r + f_0$  die Offsetfrequenz genau bekannt sein. Leider können weder Offsetfrequenz noch Phasenverschiebung direkt gemessen werden. Eine interferometrische Messung der Phasenverschiebung ist zwar möglich. Die Genauigkeit würde dabei aber nicht ausreichen.

Die Methode der Selbstreferenz, mit der die Offsetfrequenz bestimmt wird, wird in Abschnitt 3.4 erläutert.

#### 3.2.3 \*Mathematische Herleitung des Zusammenhangs zwischen Phasenverschiebung und Offsetfrequenz

Diese Beziehung zwischen Offsetfrequenz und Phasenverschiebung kann auch durch reine mathematische Überlegungen hergeleitet werden:

Wenn die Pulsschwingung zwischen zwei Pulsen um  $\Delta \varphi$  phasenverschoben ist, dann ist dies genauso, als ob alle Moden zwischen zwei Pulsen um die Phase  $\Delta \varphi$  verschoben wären. Somit haben alle Moden zwischen zwei aufeinanderfolgenden Pulsen – also nach der Zeit au – die Phasenverschiebung  $\Delta \varphi$ . Nach einer beliebigen Zeit t haben die Moden entsprechend die Phasenverschiebung  $\frac{\varDelta \varphi}{ au} \cdot t$ . Berücksichtigt man diese Phasenverschiebung bei allen Moden, lässt sich die Schwingung einer Mode wie folgt ausdrücken:

$$s_n = A_n \cdot \sin \left( 2\pi \ n f_r \cdot t + \frac{\Delta \varphi}{\tau} \cdot t \right) = A_n \cdot \sin \left( 2\pi \left( n \cdot f_r + \frac{\Delta \varphi}{2\pi\tau} \right) \cdot t \right)$$

Da die n-te Mode die Form  $s_n = A_n \cdot sin(2\pi f_n \cdot t)$  hat, kann der Term  $n \cdot f_r + \frac{\Delta \varphi}{2\pi\tau}$  mit der Frequenz  $f_n$  identifiziert werden. Es gilt also  $f_n = n \cdot f_r + f_0$  mit  $f_0 = \frac{\Delta \varphi}{2\pi\tau} = \frac{\Delta \varphi f_r}{2\pi}$ . Somit ist  $\Delta \varphi = 2\pi \cdot \frac{f_0}{f_r}$ .

#### 3.2.4 Pulsstabilität und Frequenzkamm

Wie in den vorigen Abschnitten gezeigt wurde, hängt die Pulswiederholungsfrequenz f, direkt mit der Zeit zwischen zwei Pulsen  $\tau$  zusammen. Es ist deswegen naheliegend, dass ein streng periodischer Pulszug, der zwischen den einzelnen Pulsen immer den gleichen zeitlichen Abstand  $\tau$  hat, in der Frequenzdarstellung auch immer den gleichen Frequenzabstand  $f_c$  zwischen den Moden aufweist. Diese Aussage kann mathematisch exakt belegt werden. 16

Es stellt sich aber die Frage, ob der Frequenzabstand bei realen Frequenzkämmen aufgrund experimenteller Ungenauigkeiten wirklich der theoretischen Wiederholungsfrequenz entspricht. Selbst eine geringe Abweichung hätte große Auswirkungen: Ein typischer Titan-Saphir-Laser hat eine Repetitionsfrequenz von etwa einem GHz. Ein optischer Kamm, der einen Frequenzbereich von ein paar Hundert THz aufweist, hat einige 100.000 Zähne. Selbst eine sehr geringe Variation der Repetitionsfrequenz, dem Abstand zwischen zwei benachbarten Zähnen, könnte durch die große Anzahl der Zähne so verstärkt werden, dass der Kamm für genaue Messungen unbrauchbar wird.

<sup>&</sup>lt;sup>16</sup> Dies kann sowohl über die Fourier-Entwicklung der Pulsfolge als auch über die Betrachtung der Gruppengeschwindigkeitsdispersion gezeigt werden (Udem 2002B). Diese Herleitungen überschreiten aber den Rahmen dieses Textes.



In der nächsten Simulationsaufgabe wird untersucht, wie sich Störungen der Kammfrequenzen auf den Verlauf des Pulszuges auswirken.

#### Simulation 4

#### Simulationsaufgaben

4. Verändern Sie den Kamm so, dass sich der Frequenzabstand zwischen den Pulsen nur geringfügig ändert. Verschieben Sie dazu die farbigen Kreise an den Spitzen der Zähne. Beobachten Sie, wie sich die Form des zeitlichen Signals verändert.

Es ist erstaunlich, wie sich nur geringfüge Veränderungen der Kammfrequenzen auf den Verlauf des Pulszuges auswirken. In Abb. 15 a) ist ein perfekt regelmäßiger Frequenzkamm und der daraus resultierende Pulszug dargestellt. In Abb. 15 b) wurden die Freguenzen der einzelnen Pulse kaum wahrnehmbar verschoben. Es ist zu sehen, dass selbst bei dieser geringen Frequenzänderung die Pulse des Pulszuges bereits nach wenigen Pulsen zerlaufen.

Nun kann man wie folgt argumentieren: Wenn nur geringfüge Veränderungen der Kammfrequenzen die Pulse zerfließen lassen, so kann ein regelmäßiger Pulszug nur von einem regelmäßigen Frequenzkamm erzeugt werden. Ist der Pulszug also regelmäßig, was experimentell gut zu überprüfen ist, muss auch ein regelmäßiger Frequenzkamm vorliegen.

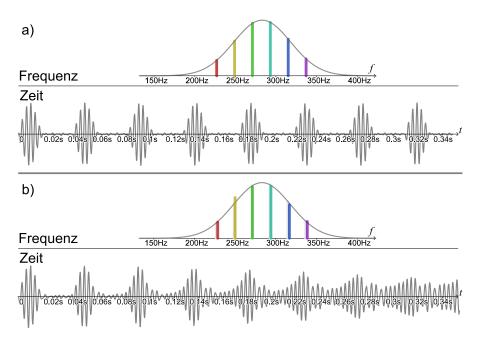


Abb. 15: Auswirkung von Unregelmäßigkeiten der Kammzähne auf die Pulsfolge. a) regelmäßiger Frequenzkamm b) unregelmäßiger Frequenzkamm



### 3.3 Experimentelle Verwirklichung von optischen **Frequenzkämmen**

Bereits in den 1970er Jahren gab es Überlegungen, Femtosekundenlaser als optische Frequenzkämme zu verwenden (Eckstein 1978). Aber erst Ende der 1990er Jahre war es möglich, die Offsetfrequenz und damit die Frequenzen der einzelnen Kammzähne genau zu bestimmen (Udem 2002A und Hall 2001). Die experimentelle Methode der Selbstreferenz, durch die dies ermöglicht wurde, wird in Abschnitt 3.3.1 dargestellt.

Die Methode der Selbstreferenz kann aber nur angewandt werden, wenn die Frequenzen des Kamms mindestens eine Oktave überspannen. Eine Oktave beschreibt - genauso wie in der Musik – das Intervall von einer Frequenz bis zum Doppelten ihres Werts. Die Erzeugung eines Frequenzkamms dieser Frequenzbreite stellte auch bis Ende der 1990er Jahre eine experimentelle Herausforderung dar. Mithilfe von photonischen Kristallphasern gelang es schließlich, optische Frequenzkämme spektral auf eine Oktave Licht zu verbreitern, sodass eine Ermittlung der Offsetfrequenz möglich war (Alfano 2007). Auf diese Frequenzverbreiterung wird in Abschnitt 3.3.2 eingegangen.

#### 3.3.1 Selbstreferenz – Messung der Phasenverschiebung

Die größte experimentelle Herausforderung bei der Verwirklichung eines optischen Frequenzkamms ist die genaue Bestimmung der Offsetfrequenz  $f_a$ . Mit der Methode der Selbstreferenz ist es den Arbeitsgruppen von Theodor Hänsch und von John L. Hall Ende der 1990er unabhängig voneinander gelungen die Offsetfrequenz so genau zu bestimmen.

Man geht dabei so vor, wie dies in Abb. 16 skizziert ist:

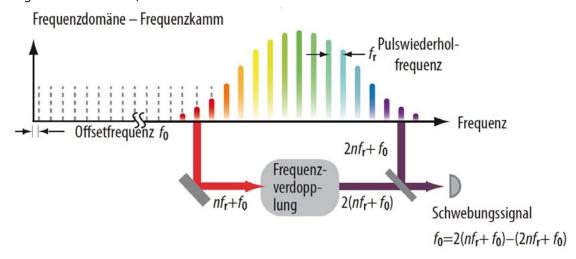


Abb. 16: Methode der Selbstreferenz (Quelle: Kozma 2014)

Hierzu verwendet man das Signal einer möglichst niedrigen Frequenz des Frequenzkamms. Diese hat die Frequenz:  $f_0 = n \cdot f_1 + f_0$ . Verdoppelt man diese Frequenz, beispielsweise durch einen nichtlinearen Kristall, erhält man :  $2f_n = 2 (n \cdot f_r + f_0)$ . Dieses Signal überlagert man mit einem Signal des Kamms mit etwa der doppelten Frequenz  $f_{2n} = 2n \cdot f_r + f_0$ . Zwischen diesen beiden Signalen entsteht eine Schwebung, wie dies in Abschnitt 2 beschrieben ist.



Bestimmt man die Schwebungsfrequenz, stellt man fest, dass diese genau der Offsetfrequenz  $f_0$  entspricht:

$$f_{Schwebung} = |2f_n - f_{2n}| = |2(n \cdot f_r + f_0) - 2n \cdot f_r + f_0| = f_0$$

Experimentell wird dies so umgesetzt, dass mit optischen Filtern breitere Bänder des Frequenzspektrums am unteren sowie am oberen Rand des Spektrums separiert werden. Die oben beschriebene Überlagerung findet jeweils paarweise bei zwei passenden Frequenzen des Kamms statt. Bei jeder dieser Überlagerungen entsteht eine Schwebung mit der Offsetfrequenz  $f_0$ . Die Summe dieser Schwebungssignale hat eine relativ hohe Intensität, die mithilfe einer Hochgeschwindigkeitsfotodiode vermessen werden kann.

#### 3.3.2 Photonische Kristallfasern – Erzeugung einer Oktave Licht

Die spektrale Breite eines gewöhnlichen Titan-Saphir-Lasers reicht von etwa 670 bis 1070 nm und ist somit nicht ausreichend für die im letzten Abschnitt beschriebene Technik der Selbstreferenz. Mithilfe von photonischen Kristallphasern ist es aber möglich die Bandbreite von Laserpulsen zu erweitern.

Dabei wird das Licht des Laserpulses durch eine spezielle Glasfaser geleitet. Innerhalb des Lichtleiters finden wie im Lasermedium, verschiedene Effekte statt, die Einfluss auf den Laserpuls haben. Die beiden wichtigsten sind hierbei die Dispersion sowie der Kerr-Effekt, die im Abschnitt 3.1.5 besprochen wurden.

In diesem Fall ist aber nur der Kerr-Effekt erwünscht. Die Dispersion würde in einer gewöhnlichen Glasfaser zum Zerfließen der Pulse führen, da die Wellen unterschiedlicher Frequenzen mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten auseinander laufen würden. Photonische Kristallfasern sind so konzipiert, dass der Effekt der Dispersion so weit wie möglich reduziert wird und nur eine sehr geringe zeitliche Verbreiterung des Pulses stattfindet. Hierdurch können die Laserpulse eine relativ lange Strecke innerhalb der Faser zurücklegen, um den gewünschten Effekt der Selbstphasenmodulation zu verstärken:

Durch den Kerr-Effekt wird innerhalb der Glasfaser die Ausbreitungsgeschwindigkeit dort reduziert, wo der Puls hohe Intensitäten aufweist. Dadurch wird wiederum der Puls selbst verformt. Diese Veränderung des Pulses aufgrund seiner eigenen Intensität wird als **Selbst-phasenmodulation** bezeichnet. Dabei wird in der Mitte des Pulses die Schwingung am meisten verlangsamt, da hier die Intensität maximal ist. Dies führt zu einer Verzögerung der Wellenberge und -täler, die innerhalb des Pulses nach hinten geschoben werden. Die Enden des Pulses bleiben dabei so gut wie unverändert, da hier die Intensität des Pulses und somit der Effekt der Selbstmodulation gering ist. Deswegen breiten sich diese mit einer unveränderten Geschwindigkeit aus. Somit bleibt die Breite des Pulses gleich, nur die Wellenberge und -täler werden innerhalb des Pulses nach hinten geschoben. Dies führt zu einer Streckung der Wellen an der Pulsfront und zu einer Stauchung der Wellen am Pulsende, so wie es in Abb. 17 zu sehen ist

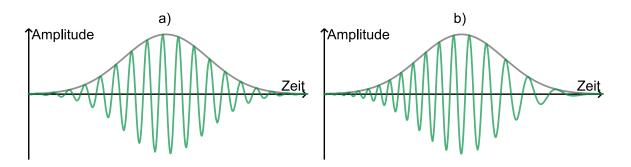


Abb. 17: Die Selbstphasenmodulation einer photonischen Kristallfaser führt zu einem Verschieben der Wellenberge und –täler. a) Puls vor der Selbstphasenmodulation b) Puls nach der Selbstphasenmodulation

Die Selbstphasenmodulation führt zu einer Erweiterung der Bandbreite des Laserpulses. In Abb. 17 b) ist zu sehen, dass sich die Frequenz der Pulsschwingung während des Pulses verändert: An der Pulsfront ist die Frequenz erkennbar niedriger als am Ende. Daran lässt sich die Bandbreitenerweiterung des Pulses gut erkennen.

Die Selbstphasenmodulation findet bei allen Pulsen eines Pulszuges natürlich identisch statt. Daher entsteht nach Durchlaufen der photonischen Kristallfaser wieder ein Pulszug mit dem gleichen Pulsabstand  $\tau$  bzw. der gleichen Wiederholungsfrequenz  $f_r$ . Somit müssen die neu entstandenen Frequenzen ebenfalls die Bedingung:

$$f_n = n \cdot f_r + f_0$$

erfüllen. Eine Mode, die nicht diese Bedingung erfüllen würde, hätte nicht die richtige Periodizität und würde nicht zu einem  $f_r$ -periodischen Pulszug führen. Dieser Zusammenhang wurde auch in Simulationsaufgabe 4 der Simulation 4 veranschaulicht.



## 4 Aktuelle Entwicklungen

Frequenzkämme sind heutzutage ein nicht mehr wegzudenkendes Werkzeug in vielen Laboren auf der ganzen Welt. Die Frequenzkammtechnik hat sich seit ihrer Entwicklung in den letzten zwei Jahrzehnten deutlich weiterentwickelt. Seit einigen Jahren können sogar fertige Frequenzkammsysteme kommerziell erworben werden, die wartungsarm und einfach zu bedienen sind. Hier kann per Knopfdruck die Repetitionsfrequenz f, direkt eingestellt werden, sodass im THz-Bereich jede beliebige Frequenz auf einfache Weise erzeugt werden kann. Diese Frequenzkämme basieren auf Faserlasersystemen, die weniger störanfällig sind, als die in diesem Artikel beschriebenen Titan-Saphir-Lasersysteme. Das Prinzip der Frequenzkämme ist in beiden Fällen aber das gleiche.

## 5 Anwendung von Frequenzkämmen: Uhrenvergleich

In diesem Abschnitt wird dargestellt, wie mithilfe eines Frequenzkamms eine optische Frequenz gemessen wird. Bei diesem Verfahren wird, korrekterweise, von einem Frequenzvergleich gesprochen, da dabei die Frequenz einer optischen Schwingung (z.B. einer optischen Atomuhr) mithilfe eines Frequenzkamms mit der Frequenz einer Mikrowellen-Schwingung (z.B. einer Cäsium-Atomuhr) verglichen wird.

### 5.1 Experimenteller Aufbau und Durchführung

Zur "Vermessung" einer optischen Frequenz  $f_{out}$  mithilfe eines Frequenzkamms muss das Signal der optischen Schwingung mit dem Signal des Frequenzkamms überlagert werden. In dem hier betrachteten Beispiel wird exemplarisch die Frequenz einer optischen Atomuhr<sup>17</sup> untersucht.<sup>18</sup>

Wie in Abb. 18 zu sehen ist, wird dabei der Laser der Atomuhr und der Laser des Frequenzkamms mithilfe eines Strahlteilers überlagert. Das Überlagerungssignal wird mit einer Hochgeschwindigkeitsfotodiode detektiert.

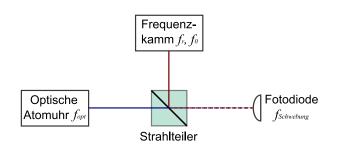


Abb. 18: Experimenteller Aufbau zur Untersuchung einer optischen Atomuhr mit einem Frequenzkamm,

 $f_{opt}$ : Frequenz der optischen Atomuhr,  $f_r$ : Repetitionsfrequenz des Frequenzkamms,  $f_0$ : Offsetfrequenz des Frequenzkamms,  $f_{Schwebung}$ : Schwebungsfrequenz der Überlagerung des Signals der optischen Uhr und dem benachbarten Zahn des Frequenzkamms.

<sup>&</sup>lt;sup>17</sup> Optische Atomuhren funktionieren prinzipiell genauso wie Mikrowellen-Atomuhren: Dabei wird das Signal eines Lasers auf die Frequenz eines optischen Atomübergangs stabilisiert. Eine optische Atomuhr erzeugt also Laserlicht mit einer sehr genauen, zeitlich konstanten Frequenz.

<sup>&</sup>lt;sup>18</sup> Die "Vermessung" anderer optischen Signale mit einem Frequenzkamm (z.B. bei der Wasserstoffspektroskopie) beruhen auf dem gleichen Prinzip. Die dafür verwendeten experimentellen Verfahren unterscheiden sich dadurch kaum von der hier vorgestellten Methode.

### 5.2 Frequenzvergleich

Bei der Überlagerung entsteht eine Schwebung zwischen dem Signal der Atomuhr und dem benachbarten Zahn des Frequenzkamms. 19 Dieses Schwebungssignal  $f_{\textit{Schwebung}}$  liegt im Mikrowellenbereich und kann von einer Fotodiode aufgelöst werden. In Abb. 19 sind die Frequenzen der beiden Signale schematisch dargestellt.

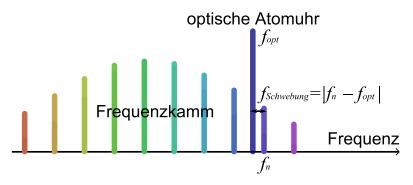


Abb. 19: Schematische Darstellung der Frequenzen des Frequenzkamms und der optischen Atomuhr. Bei der Überlagerung der beiden Signale entsteht ein Schwebungssignal mit der Frequenz  $f_{\text{Schwebung}} = |f_n - f_{out}|$ 

Durch einen Vergleich mit einer Cäsium-Atomuhr können die drei Mikrowellen-Frequenzen:  $f_0$  (Offsetfrequenz des Frequenzkamms),  $f_c$  (Repetitionsfrequenz des Frequenzkamms) und  $f_{Schwebung}$  (Schwebungsfrequenz der Überlagerung des Signals der optischen Atomuhr und des benachbarten Zahns des Frequenzkamms) "bestimmt"<sup>20</sup> werden.

Die optische Frequenz  $f_{oot}$  lässt sich durch diese drei Frequenzen wie folgt ausdrücken:

$$f_{opt} = n \cdot f_r + f_0 + f_{Schwebung}$$

#### Aufgabe 7

Zeigen Sie, dass sich der Zusammenhang

$$f_{opt} = n \cdot f_r + f_0 + f_{Schwebung}$$

aus der Schwebungsfrequenz (s. dazu Abschnitt 2.3.3):

$$f_{\text{Schwebung}} = |f_n - f_{\text{opt}}|$$

und der Frequenz des n-ten Zahns des Frequenzkamms (s. dazu Abschnitt 3.2.2):

$$f_n = n \cdot f_r + f_0$$

herleiten lässt.

<sup>&</sup>lt;sup>19</sup> In Abschnitt 2.3 wird das Phänomen der Schwebung sowie das Prinzip der Messung von optischen Signalen mithilfe von Schwebungen ausführlich erläutert.

<sup>&</sup>lt;sup>20</sup> Genauer gesprochen wird durch Frequenzvergleich jeweils ein Verhältnis zwischen diesen Frequenzen und der Frequenz der Cäsium-Atomuhr ermittelt.



Um mit der Gleichung  $f_{opt}$  =  $n \cdot f_r + f_0 \pm f_{Schwebung}$  arbeiten zu können, muss neben den vier Frequenzen einerseits noch das n bekannt sein, und andererseits muss man wissen, ob das Schwebungssignal am Ende der Gleichung addiert oder subtrahiert werden muss.

Einerseits muss also bekannt sein, welcher Zahn des Frequenzkamms am nächsten an der Frequenz der optischen Atomuhr liegt und zusammen mit dem Signal der optischen Atomuhr das Schwebungssignal erzeugt – hieraus ergibt sich das n. Andererseits muss man wissen, welche dieser beiden Frequenzen größer ist – hieraus ergibt sich, ob die Schwebungsfrequenz addiert oder subtrahiert werden muss.

Diese beiden Informationen erhält man, indem man die Frequenz der optischen Atomuhr mit einem Wellenlängenmessgerät<sup>21</sup> relativ grob bestimmt. Vergleicht man die Lage dieser grob ermittelten Frequenz mit den bekannten Frequenzen des Frequenzkamms, sieht man – wie in Abb. 19 zu erkennen ist – , welcher Zahn am nächsten an der Frequenz der optischen Atomuhr liegt und ob die Frequenz der optischen Atomuhr größer oder kleiner als die Frequenz dieses Zahns ist.

In den folgenden beiden Aufgaben wird die optische Frequenz einer Strontium-Atomuhr mithilfe eines Frequenzkamms und einer Cäsium-Atomuhr ermittelt.

#### Aufgabe 8

Mit einem Wellenlängenmessgerät wurde die Frequenz einer Strontium-Atomuhr auf 429.228.000  $\pm$  8 MHz genau bestimmt. Die Repetitionsfrequenz des verwendeten Frequenzkamms wurde auf  $f_r$ =100.000,00 kHz eingestellt. Die Offsetfrequenz betrug bei dieser Messung  $f_o$ = 67.563,39 kHz, die Schwebungsfrequenz  $f_{Schwebung}$ = 36.666,48 kHz. Diese drei Frequenzen wurden mithilfe einer Cäsium-Atomuhr eingestellt bzw. bestimmt.

- a) Ermitteln Sie den Zahn des Frequenzkamms, der am nächsten an der Frequenz der Strontium-Atomuhr liegt, und ob die Frequenz der Strontium-Atomuhr größer oder kleiner als die Frequenz dieses Zahns ist.
- b) Bestimmen Sie die Frequenz der Strontium-Atomuhr.

Lösung:

a) n = 4.292.279; die Frequenz des am nächsten gelegenen Zahns des Frequenzkamms ist:  $f_n = n \cdot f_r + f_0 = 429.227.967.563,39$  kHz. Die Frequenz der Strontium-Atomuhr liegt etwas über dieser Frequenz. Deswegen muss in diesem Fall die Schwebungsfrequenz zur Frequenz des Zahns addiert werden, um die Frequenz der Atomuhr zu erhalten, hier gilt:  $f_{opt} = n \cdot f_r + f_0 \pm f_{Schwebung}$ .

b)  $f_{opt}$  = 429.228.004.229,87 kHz = 429,228 004 229 87 THz

<sup>&</sup>lt;sup>21</sup> Als Wellenlängenmessgeräte werden beispielsweise Gitterspektrometer oder Michelson-Interferometer verwendet.

### Literaturverzeichnis

### Artikel

| (Alfano 2007)   | R. Alfano (2007): Lineale aus Licht. In: Spektrum der Wissenschaft, März 2007, S. 58   |
|-----------------|--|
| (Ashby 2018)    | N. Ashby, T. Parker und B. Patla (2018): A null test of general relativity based on a long-term comparison of atomic transition frequencies. In: Nature Phys 14, S. 822-826  |
| (Beyer 2017)    | A. Beyer, L. Maisenbacher, A. Matveev, R. Pohl, K. Khabarova, A. Grinin, T. Lamour, D. Yost, T. Hänsch, N. Kolachevsky, T. Udem (2017): The Rydberg constant and proton size from atomic hydrogen. In: Science 358, S. 79–85                                     |
| (Cundiff 2009)  | S. Cundiff, J. Ye und J. Hall (2009): Lineale aus Licht. In: Spektrum der Wissenschaft, August 2009, S. 34   |
| (Eckstein 1978) | J. Eckstein, A. Ferguson und T. Hänsch (1978): High-Resolution Two-Photon Spectroscopy with Picosecond Light Pulses. In: Phys. Rev. Lett. 40, S. 847   |
| (Hall 2001)     | J. Hall, J. Ye, S. Diddams, LS. Ma, S. Cundiff und D. Jones (2001): Ultrasensitive Spectroscopy, the Ultrastable Lasers, the Ultrafast Lasers, and the Seriously Nonlinear Fiber: A New Alliance for Physics and Metrology. In: IEEE. J. Quant. Electr. 37, 1482 |
| (Hinkley 2013)  | N. Hinkley, J. Sherman, N. Phillips, M. Schioppo, N. Lemke, K. Beloy, M. Pizzocaro, C. Oates und A. Ludlow (2013): An Atomic Clock with 10^(–18) Instability. In: Science 341, S. 1215-1218  |
| (Kozma 2014)    | I. Kozma, M. Fischer, R. Holzwarth und M. Mei (2014): Optische Frequenzkämme erobern die Welt. In: Physik Journal, Oktober 2014, S. 18   |
| (Udem 2002A)    | T. Udem, R. Holzwarth und T. W. Hänsch (2002): Optical frequency metrology. In: Nature 416, 233-237  |
| (Udem 2002B)    | T. Udem, R. Holzwarth und T. W. Hänsch (2002): Uhrenvergleich auf Femtosekundenskala. In: Physik Journal, Februar 2002, S. 39  |



### Bücher

| (Bronstein 2005) | I. Bronstein, K. Semendjajew, G. Musiol und H. Mühlig (2005): Taschenbuch der Mathematik, 6. Auflage, Verlag Harry Deutsch |
|------------------|--|
| (Metzler 2007)   | J. Grehm und J. Krause (2007): Metzler Physik SII, 4. Auflage,<br>Schroedel Verlag   |

#### Wehseiten

| webseiten       |  |  |  |  |
|-----------------|--|--|--|--|
| (Leifiphysik-1) | https://www.leifiphysik.de/akustik/akustische-wellen/versuche/schwebungen-simulation                                     |  |  |  |
| (Nist-1)        | https://tf.nist.gov/cesium/atomichistory.htm   |  |  |  |
| (Wikipedia-1)   | https://de.wikipedia.org/wiki/Formelsammlung_Trigonometrie#Summen_zweier_trigonometrischer_Funktionen_(Identit%C3%A4ten) |  |  |  |
| (Wikipedia-2)   | https://de.wikipedia.org/wiki/Formelsammlung_Trigonometrie#Additionstheoreme   |  |  |  |